

Problema C2. — La concentració (en %) d'hidrogen d'un cert compost químic ve donada, en funció del temps ($t \geq 0$), per la funció

$$H(t) = \frac{20}{1 + e^{-t}},$$

on el temps està mesurat en segons.

(a) [0.5 punts] Quina és la concentració inicial?

(a) Concentració inicial $t = 0$:

$$H(0) = \frac{20}{1 + e^0} = \frac{20}{1 + 1} = \boxed{10\%}.$$

(b) [1 punt] Comprova que la concentració d'hidrogen és sempre creixent.

(b) Mostrem que H és creixent: calculem la derivada.

$$H'(t) = 20 \cdot \frac{d}{dt} (1 + e^{-t})^{-1} = 20 \cdot \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

Per a tot $t \geq 0$ tenim $e^{-t} > 0$ i $(1 + e^{-t})^2 > 0$, així que $H'(t) > 0$.

Per tant la concentració és **sempre creixent**.

(c) [1 punt] Calcula cap a quin valor tendeix la concentració a mesura que passa el temps.

(c) Límit quan $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{20}{1 + e^{-t}} = \frac{20}{1 + 0} = \boxed{20\%}.$$