

Problema C2. — Donada la funció

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x),$$

- (a) [1 punt] Determina el domini de la funció i el comportament de la funció als extrems del seu domini.

a) Domini i comportament als extrems

- **Domini:** cal que $\ln(2x)$ estiga definida i $x \neq 0$. $\ln(2x)$ existeix si $2x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Per tant,

$$\boxed{\text{Domini} = (0, \infty)}.$$

- **Comportament quan $x \rightarrow 0^+$:** $\ln(2x) \rightarrow -\infty$ i $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. El producte $\frac{\ln(2x)}{x} \rightarrow -\infty$.
Hi ha **asíptota vertical** a $x = 0$ i $f(x) \rightarrow -\infty$.
- **Comportament quan $x \rightarrow \infty$:** $\ln(2x)$ creix molt més lent que x , així $\frac{\ln(2x)}{x} \rightarrow 0^+$.
Hi ha **asíptota horitzontal** $y = 0$ (s'hi apropa per damunt per a x prou gran).
- **Tall amb l'eix OX :** $\ln(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

(b) [1.5 punts] Calcula l'àrea compresa entre $f(x)$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = \frac{1}{2}$ i $x = 5$.

b) Àrea entre $f(x)$, l'eix OX i $x = \frac{1}{2}$, $x = 5$

Com que $f(\frac{1}{2}) = 0$ i per a $x > 1/2$ tenim $\ln(2x) > 0$, l'àrea és

$$\mathcal{A} = \int_{1/2}^5 \frac{\ln(2x)}{x} dx.$$

Substitució $u = \ln(2x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$:

$$\mathcal{A} = \int_{u=\ln 1}^{u=\ln 10} u du = \frac{u^2}{2} \Big|_{\ln 1}^{\ln 10} = \frac{(\ln 10)^2}{2}.$$

Com a valor numèric,

$$\ln 10 \approx 2.302585093 \Rightarrow \mathcal{A} \approx \frac{(2.302585093)^2}{2} \approx 2.651.$$

$$\mathcal{A} = \frac{(\ln 10)^2}{2} \approx 2.651 \text{ unitats}^2.$$