

Exercici 1

Un agricultor ha observat que si es planten 25 pereres per hectàrea, el rendiment és de 370 peres per arbre. A més a més, també ha comprovat que la relació entre el nombre de peres per arbre i el nombre de pereres per hectàrea és lineal, de manera que per cada arbre plantat de més per hectàrea, el rendiment disminueix en 10 peres per perera.

- a) Anomenem x el nombre de pereres de més que plantem, addicionals a les 25 inicials. Calculeu la funció de la producció total de peres per hectàrea $P(x)$ en funció de x .
[1 punt]

1.

- a) Si x és el nombre de pereres addicionals a les 25 plantades inicialment, la producció de cada una de les $25 + x$ pereres serà de $370 - 10x$ peres.

La producció total serà el producte del nombre de peres per arbre pel nombre de pereres:

$$P(x) = (25 + x) \cdot (370 - 10x) \rightarrow P(x) = -10x^2 + 120x + 9250.$$

- b) Quin és el nombre total de pereres per hectàrea que cal plantar per a obtenir el màxim de producció per hectàrea? Quina és aquesta producció màxima? A partir de quantes pereres per hectàrea no s'obté cap producció?

[1,5 punts]

- b) Per buscar el punt on s'assoleix el màxim de la funció de producció, calculem la derivada i la igulem a zero:

$$P'(x) = -20x + 120 \rightarrow P'(x) = 0 \rightarrow x = 6$$

Observem que és un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a 6 i, per tant, la funció és creixent per a $x < 6$, mentre que és negativa per a valors superiors a 6 i, per tant, la funció és decreixent per a $x > 6$.

Així doncs, el nombre total de pereres que caldrà plantar per hectàrea per obtenir una producció màxima serà de $25 + 6 = 31$ pereres per hectàrea.

La producció màxima serà de $P(6) = 31 \cdot 310 = 9610$ peres.

Per saber a partir de quin valor no hi haurà cap producció cal resoldre $P(x) = 0$

$$-x^2 + 12x + 925 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (925)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12 \pm 62}{-2}.$$

Tenim dues solucions: $x = -25$ i $x = 37$. La primera correspon a no plantar cap perera per hectàrea i la segona correspon a plantar 37 pereres addicionals per hectàrea. En aquest cas la producció serà nul·la. És a dir, la producció serà nul·la si no es planta cap perera per hectàrea o si es planta un total de $25 + 37 = 62$ pereres per hectàrea.