

Exercici 2

Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{array} \right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m .

[1,25 punts]

2. a) Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 - (2m - 3m) = m^2 + m = m(m + 1)$$

i observem que s'anul·la quan $m = 0$ i $m = -1$. Per tant,

- Si $m \neq 0$ i $m \neq -1$, el rang de la matriu de coeficients és $\text{rang}(A) = 3$, el rang de la matriu ampliada també i, com que també coincideix amb el nombre d'incògnites, 3, el sistema és compatible determinat; té, per tant, solució única.
- Si $m = 0$, la matriu de coeficients té determinant zero i rang 2 (per exemple, gràcies al menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$). Com que la matriu ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ també té rang 2, el sistema és compatible indeterminat i té infinites solucions que dependran d'un paràmetre.
- Si $m = -1$, la matriu de coeficients també té rang 2, mentre que el rang de l'ampliada és 3: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (desenvolupant, per exemple, el determinant de les tres darreres columnes per la segona fila). Per tant, el sistema és incompatible i no té solució.

b) Resoleu el sistema per a $m = 1$.

[0,5 punts]

b) Si $m = 1$, el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{array} \right\}$$

i sabem que és compatible determinat. Substituint $x = -2z$ i $y = 1 + z$ a la primera equació obtenim

$$-2z + 3(1 + z) + z = 5,$$

d'on resulta $2z = 2$ i $z = 1$. Per tant, la solució és $(x, y, z) = (-2, 2, 1)$.

c) Resoleu el sistema quan aquest tingui infinites solucions.

[0,75 punts]

c) El sistema té infinites solucions quan és compatible indeterminat, és a dir, quan $m = 0$. En aquest cas, de les dues últimes equacions en resulta $z = 0$, i la primera ens diu $x + 3y = 5$. Per tant, les solucions del sistema són les de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 - 3k \\ y = k \in R \\ z = 0 \end{array} \right\}$$