

Exercici 3

La lesió per sesamoïditis (inflamació de l'os sesamoide del peu) és relativament habitual entre la població que practica esports d'impacte (atletisme, bàsquet, tennis...). En una població d'esportistes, s'ha fet un estudi diferenciant entre els que practiquen esports d'impacte i els que practiquen esports sense impacte brusc (com ara natació, pilates, senderisme...). S'ha pogut determinar que el 45 % practiquen esports d'impacte. Entre aquests, un 10 % pateixen lesions per sesamoïditis, mentre que entre els que no practiquen esports d'impacte només un 3 % presenten aquesta lesió. Escollim un esportista a l'atzar.

a) Quina és la probabilitat que pateixi sesamoïditis?

[0,75 punts]

3. a) Considerem els esdeveniments aleatoris

$$\begin{aligned} I &= \text{"practicar un esport d'impacte"}, \\ S &= \text{"patir sesamoïditis"}. \end{aligned}$$

De les dades de l'enunciat sabem que $P(I) = 0,45$, $P(\bar{I}) = 1 - 0,45 = 0,55$, $P(S | I) = 0,1$, i $P(S | \bar{I}) = 0,03$. Per la llei de les probabilitats totals, tenim:

$$P(S) = P(S|I)P(I) + P(S|\bar{I})P(\bar{I}) = 0,1 \cdot 0,45 + 0,03 \cdot 0,55 = 0,0615.$$

b) Si l'esportista escollit té una lesió per sesamoïditis, quina és la probabilitat que practiqui esports d'impacte?

[0,75 punts]

b) Per la fórmula de Bayes:

$$P(I|S) = \frac{P(S|I)P(I)}{P(S)} = \frac{0,1 \cdot 0,45}{0,0615} \approx 0,7317 \dots$$

Una empresa de calçat esportiu ha creat una sabatilla amb amortiment per a minimitzar les lesions per sesamoïditis. Els beneficis generats per la venda d'aquest producte, en milers d'euros, segueixen una funció de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, on x són els anys transcorreguts des que la sabatilla va sortir a la venda i a , b i c són constants reals.

- c) Calculeu els valors de a , b i c sabent que el primer any es van obtenir el màxim de beneficis, amb un valor de 8 000 euros, i que el segon any va haver-hi un punt d'inflexió en els beneficis.

[1 punt]

c) El primer any s'obtenen el màxim de beneficis, per tant $x = 1$ és un màxim de la funció i $f'(1) = 0$; i aquests beneficis obtinguts són de 8.000 €, per tant, $f(1) = 8$. També ens diuen que el segon any hi va haver un punt d'inflexió en els beneficis, per tant, $f''(2) = 0$. Calculem la primera i segona derivades de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ i imposem aquestes tres condicions:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c, \\f''(x) &= 6ax + 2b,\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}f'(1) &= 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\f(1) &= 8 \Rightarrow a + b + c = 8 \\f''(2) &= 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0\end{aligned} \right\}$$

Restant les dues primeres equacions, obtenim $2a + b = -8$ i, combinant amb la tercera:

$$\left. \begin{aligned}12a + 2b &= 0 \\2a + b &= -8\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}12a + 2b &= 0 \\-4a - 2b &= 16\end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{16}{8} = 2.$$

$$8a = 16$$

Per tant, $2 \cdot 2 + b = -8$, d'on $b = -12$. Finalment,

$$a + b + c = 8 \Rightarrow c = 8 - a - b = 8 - 2 + 12 = 18.$$

La funció que compta els beneficis d'aquesta empresa és, doncs, $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$.