

### Exercici 4

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen.

### OPCIÓ B

Considereu el pla  $\pi: 2x - y + z = 5$  i el punt  $P = (0, 1, 3)$ .

- a) Comproveu que la distància del punt  $P$  al pla  $\pi$  és  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .  
[0,5 punts]

**4. OPCIÓ B.** a) Només cal aplicar la fórmula de la distància punt-pla per comprovar que

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Trobeu l'equació general d'un pla  $\pi_1$  paral·lel a  $\pi$  i que passi pel punt  $P$ . Quina és la distància entre  $\pi_1$  i  $\pi$ ?

[0,75 punts]

b) Tot pla paral·lel a  $\pi$  és de la forma  $2x - y + z = D$  per algun  $D$  real. Com que volem que passi pel punt  $P$  tenim

$$2 \cdot 0 - 1 + 3 = D$$

i, per tant,  $D = 2$ . El pla buscat és  $\pi_1: 2x - y + z = 2$ . Clarament la distància entre  $\pi_1$  i  $\pi$  és  $d(\pi_1, \pi) = d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

- c) Trobeu l'equació general d'un segon pla  $\pi_2$ , diferent de  $\pi_1$ , que és paral·lel a  $\pi$  i que estigui a una distància  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  de  $\pi$ .  
[1,25 punts]

c) Per trobar un segon pla  $\pi_2$  també paral·lel a  $\pi$  i que també estigui a distància  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  de  $\pi$ , buscarem el punt simètric,  $P'$ , de  $P$  respecte al pla  $\pi$ . Busquem la recta perpendicular a  $\pi$  que passa pel punt  $P$ . L'equació paramètrica d'aquesta recta és

$$r: (x, y, z) = (0, 1, 3) + \lambda \cdot (2, -1, 1) = (2\lambda, 1 - \lambda, 3 + \lambda).$$

Busquem el punt d'intersecció  $M$  de la recta  $r$  amb el pla  $\pi$ :

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2\lambda) - (1 - \lambda) + 3 + \lambda &= 5 \\ 6\lambda &= 3 \\ \lambda &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Per tant,  $M = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ . Ara ens cal trobar el punt simètric  $P'$  de  $P$  respecte de  $\pi$ , fent per exemple  $P' = P + 2\overrightarrow{PM} = (0, 1, 3) + 2 \cdot \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, 0, 4)$ .

Finalment el pla buscat és de la forma  $2x - y + z = E$  per algun  $E$  real i passa per  $P'$ , així doncs,

$$2 \cdot 2 - 0 + 4 = E,$$

i  $E = 8$ . Tenim doncs que  $\pi_2$  és el pla d'equació  $2x - y + z = 8$ .

Alternativament, també poden plantejar l'equació de la distància d'un pla paral·lel genèric, a un punt qualsevol de  $\pi$  i demanar que sigui  $\sqrt{6}/2$ . Una solució serà el  $\pi_1$  i l'altra el pla buscat  $\pi_2$ . Compteu bé aquesta manera alternativa si està ben justificada i calculada.