

Problema 1.A. Considerem les matrius:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determineu la matriu X que és solució de l'equació $4XB + C^t D = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2 i C^t la transposada de la matriu C . (2 punts)

a) Trobar la matriu X

L'equació és

$$4XB + C^t D = I,$$

on I és la matriu identitat d'ordre 2.

Pas 1. Calcular C^t

La transposada de C és

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pas 2. Calcular $C^t D$

Multipliquem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Fem els productes fila per columna.

Primera fila

- Primera columna:

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 2$$

- Segona columna:

$$1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 2$$

Per tant,

$$(2, 2).$$

Segona fila

- Primera columna:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -2$$

- Segona columna:

$$0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

Per tant,

$$(-2, 0).$$

Així,

$$C^t D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pas 3. Aïllar $4XB$

L'equació és

$$4XB + C^t D = I.$$

Restem $C^t D$ als dos costats:

$$4XB = I - C^t D.$$

Com que

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenim

$$I - C^t D = \begin{pmatrix} 1 - 2 & 0 - 2 \\ 0 - (-2) & 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$4XB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dividim entre 4:

$$XB = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Pas 4. Calcular B^{-1}

Primer, el determinant:

$$\det(B) = 4 \cdot 3 - (-1)(-2) = 12 - 2 = 10.$$

Per tant,

$$B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pas 5. Multiplicar per B^{-1}

Com que

$$XB = M,$$

tenim

$$X = MB^{-1}.$$

Calulem

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primer fem el producte.

Primera fila

- Primera columna

$$-\frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{3}{4} - 1 = -\frac{7}{4}$$

- Segona columna

$$-\frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{9}{4}$$

Segona fila

- Primera columna

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

- Segona columna

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Ara multipliquem per $\frac{1}{10}$:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

Resposta de l'apartat a)

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

b) Una matriu A es diu que és idempotent si $A^2 = A$. Considerem la matriu:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Determineu per a quins valors de z la matriu FC és idempotent. (1,5 punts)

b) Per a quins valors de z la matriu FC és idempotent?

Es dona

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Una matriu és idempotent si

$$A^2 = A.$$

Aquí

$$A = FC.$$

Pas 1. Calcular FC

Multipliquem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primera fila

- Primera columna

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$$

- Segona columna

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

Segona fila

- Primera columna

$$0 + 0 + z = z$$

- Segona columna

$$0$$

Així,

$$FC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Pas 2. Calcular $(FC)^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}.$$

Pas 3. Imposar la condició d'idempotència

Volem

$$(FC)^2 = FC.$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Iguallem els elements corresponents.

- $1 + z = 1$

$$z = 0.$$

- L'últim element també dona

$$z = 0.$$

És compatible.

Resposta de l'apartat b)

$$z = 0$$