

PREGUNTA 1: PROBABILITAT I ESTADÍSTICA (2.5 punts)

Durant la setmana cultural d'un centre docent, el Departament de Matemàtiques organitza un joc d'atzar per rondes en el qual els alumnes poden obtenir punts canviabls per xicotets premis. En cada ronda es llança primer una moneda i, a continuació, un dau de sis cares. El resultat de la moneda combinat amb el valor obtingut pel dau determina la condició per a guanyar la ronda:

- Si la moneda ix cara, l'alumne guanya la ronda si el número obtingut en el dau és major o igual que 5.
- Si la moneda ix creu, l'alumne guanya la ronda si el número obtingut en el dau és parell.

Cada ronda és independent i segueix exactament aquest mateix procediment.

Respon a tots els apartats

1.1 (0.5 punts) Calcula la probabilitat que, en una ronda qualsevol, l'alumne guanye.

1.1 (0,5 punts) Probabilitat de guanyar una ronda

Definim els successos:

- C : ix cara.
- X : ix creu.
- G : guanyar la ronda.

La moneda és equilibrada:

$$P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$$

- Si ix cara, es guanya si el dau és 5 o 6:

$$P(G|C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Si ix creu, es guanya si el dau és parell (2, 4 o 6):

$$P(G|X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Aplicant el **teorema de la probabilitat total**:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(C) P(G|C) + P(X) P(G|X) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Resposta:

$$P(G) = \frac{5}{12} \approx 0,4167$$

1.2 (1 punt) Sabent que en una ronda l'alumne ha guanyat, quina és la probabilitat que en el llançament de la moneda haja eixit cara?

1.2 (1 punt) Probabilitat que haja eixit cara sabent que ha guanyat

Cal calcular

$$P(C|G).$$

Utilitzem el **teorema de Bayes**:

$$P(C|G) = \frac{P(C) P(G|C)}{P(G)}$$

Substituint els valors:

$$P(C|G) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

Resposta:

$$P(C|G) = \frac{2}{5} = 0,4$$

1.3 (1 punt) Si s'utilitza una moneda trucada de manera que en llançar-la sempre s'obté cara, i es fan exactament 7 rondes del joc, calcula la probabilitat que l'alumne guanye exactament 5 vegades.

1.3 (1 punt) Probabilitat de guanyar exactament 5 de les 7 rondes

Ara la moneda està **trucada** i sempre ix **cara**.

Per tant, només es guanya si el dau és 5 o 6.

La probabilitat de guanyar una ronda és

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La variable aleatòria

X = nombre de rondes guanyades

segueix una distribució binomial:

$$X \sim B(7, \frac{1}{3}).$$

La probabilitat de guanyar exactament 5 rondes és

$$P(X = 5) = \binom{7}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Calculem:

$$\binom{7}{5} = 21.$$

Per tant,

$$P(X = 5) = 21 \cdot \frac{1}{243} \cdot \frac{4}{9} = \frac{84}{2187} = \frac{28}{729} \approx 0,0384.$$

Resposta:

$P(X = 5) = \frac{28}{729} \approx 0,0384$
--