

2.1 Atès el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}.$$

2.1.1 (1 punt) Discuteix el sistema segons els valors del paràmetre real α .

Considerem el sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

La matriu de coeficients és

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Discussió del sistema

Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$\begin{aligned} |A| &= \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \alpha(\alpha^2 - 1) - (\alpha + 1) - (\alpha + 1) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha - 2. \end{aligned}$$

Factoritzem:

$$\alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha - 2)(\alpha + 1)^2.$$

Cas 1. $\alpha \neq 2$ i $\alpha \neq -1$

$$|A| \neq 0.$$

Per tant, el sistema és **compatible determinat (SCD)**: té una única solució.

Cas 2. $\alpha = 2$

El sistema és

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

La matriu ampliada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Fent eliminació de Gauss s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Hi ha

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < 3.$$

Per tant és **compatible indeterminat (SCI)**: té infinites solucions.

Cas 3. $\alpha = -1$

El sistema és

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 2. \end{cases}$$

La primera i la tercera equació tenen el mateix membre esquerre però diferents termes independents.

Per tant,

$$\text{rang}(A) = 2, \quad \text{rang}(A^*) = 3.$$

És un sistema **incompatible (SI)**: no té solució.

Discussió final

Valor de α	Tipus de sistema
$\alpha \neq 2, -1$	Compatible determinat (una única solució)
$\alpha = 2$	Compatible indeterminat (infinites solucions)
$\alpha = -1$	Incompatible (cap solució)

2.1.2 (1.5 punts) Troba la solució del sistema quan aquest siga compatible.

2.1.2 Solució del sistema quan siga compatible

Cas 1. $\alpha \neq 2, -1$

Mitjançant la regla de Cramer (o Gauss) s'obté

$$x = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)} = \frac{1}{\alpha - 2}$$

$$y = \frac{2}{\alpha + 1}$$

$$z = \frac{2\alpha - 1}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}$$

És a dir,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\alpha - 2}, \frac{2}{\alpha + 1}, \frac{2\alpha - 1}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)} \right), \quad \alpha \neq 2, -1.$$

Cas 2. $\alpha = 2$

El sistema reduït és

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3y + 3z = 2. \end{cases}$$

Prenent

$$z = t,$$

resulta

$$y = \frac{2}{3} - t,$$

i

$$x = 1 - 2 \left(\frac{2}{3} - t \right) - t = t - \frac{1}{3}.$$

Per tant,

$$(x, y, z) = \left(t - \frac{1}{3}, \frac{2}{3} - t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Resum final

- Si $\alpha \neq 2, -1$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\alpha - 2}, \frac{2}{\alpha + 1}, \frac{2\alpha - 1}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)} \right).$$

- Si $\alpha = 2$:

$$(x, y, z) = \left(t - \frac{1}{3}, \frac{2}{3} - t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Si $\alpha = -1$: el sistema és incompatible i **no té solució**.