

2.2 Una entitat financera utilitza models matricials per a simular el risc d'una cartera d'inversió composta per dos tipus d'actius. La matriu de simulació és

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix},$$

on a és un paràmetre real d'ajustament que reflecteix la volatilitat històrica del mercat.

2.2.1 (1 punt) El risc òptim s'obté quan es verifica l'equació $A^2 - I = 2A$, on $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determina per a quins valors de a s'optimitza el risc.

2.2.1 Determina els valors de a

Cal imposar que

$$A^2 - I = 2A.$$

Pas 1. Calcular A^2

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-a)^2 + 1 & (1-a) + (1+a) \\ (1-a) + (1+a) & 1 + (1+a)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pas 2. Calcular $A^2 - I$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix}.$$

Pas 3. Calcular $2A$

$$2A = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}.$$

Pas 4. Igualar

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2a + 1 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2a & 2 \\ 2 & 2 + 2a \end{pmatrix}.$$

Comparant els elements de la diagonal:

$$a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a$$

$$a^2 = 1.$$

També

$$a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a$$

porta a la mateixa equació.

Per tant,

$$\boxed{a = \pm 1.}$$

2.2.2 (1.5 punts) En determinades condicions de mercat, resulta convenient invertir la simulació desfent els càlculs prèviament fets. Per a fer-ho, cal que la matriu de simulació admeti inversa. Obtén els valors de a per als quals es compleix aquesta última condició i calcula la inversa de la matriu de simulació en funció del paràmetre a .

2.2.2 Inversa de la matriu

Una matriu és invertible si

$$\det(A) \neq 0.$$

Calculem el determinant:

$$\det(A) = (1 - a)(1 + a) - 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2.$$

Per tant,

$$\det(A) \neq 0 \iff a \neq 0.$$

Així, la matriu és invertible per a

$$a \neq 0.$$

Càlcul de la inversa

Per a una matriu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la inversa és

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En aquest cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2} \begin{pmatrix} 1 + a & -1 \\ -1 & 1 - a \end{pmatrix}.$$

Equivalentment,

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -(1 + a) & 1 \\ 1 & a - 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$