

Problema 2.A. El valor de mercat d'una empresa (en milions d'euros) depén del temps t (en anys) i ve donat per la funció:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{a}{t} + 2, & 1 < t \leq 2, \\ ct + \frac{b}{t^2}, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

- a) Tenint en compte que la funció ha de ser contínua i que $g'(3) = 23/27$, determineu a , b i c . (1 punt)

a) Determineu a , b i c

Com que la funció és contínua, ha de ser contínua en els punts on canvia d'expressió: $t = 1$ i $t = 2$.

També sabem que

$$g'(3) = \frac{23}{27}.$$

Pas 1. Continuitat en $t = 1$

Cal que

$$g(1) = \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t).$$

Primer tros:

$$g(1) = 1^2 + 2 = 3.$$

Segon tros:

$$\frac{a}{1} + 2 = a + 2.$$

Iguallem:

$$a + 2 = 3.$$

Per tant,

$$\boxed{a = 1.}$$

Pas 2. Continuitat en $t = 2$

Segon tros:

$$g(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Tercer tros:

$$2c + \frac{b}{4}.$$

Iguallem:

$$2c + \frac{b}{4} = \frac{5}{2}.$$

Multiplicant per 4:

$$8c + b = 10.$$

Obtenim la primera equació:

$$\boxed{8c + b = 10.}$$

Pas 3. Utilitzar $g'(3) = \frac{23}{27}$

Per al tercer tros,

$$g(t) = ct + \frac{b}{t^2}.$$

Derivem:

$$g'(t) = c - \frac{2b}{t^3}.$$

En $t = 3$:

$$c - \frac{2b}{27} = \frac{23}{27}.$$

Multipliquem per 27:

$$27c - 2b = 23.$$

Segona equació:

$$\boxed{27c - 2b = 23.}$$

Pas 4. Resoldre el sistema

Tenim

$$\begin{cases} 8c + b = 10 \\ 27c - 2b = 23 \end{cases}$$

De la primera,

$$b = 10 - 8c.$$

Substituïm:

$$27c - 2(10 - 8c) = 23.$$

$$27c - 20 + 16c = 23.$$

$$43c = 43.$$

$$\boxed{c = 1.}$$

Llavors

$$b = 10 - 8 = 2.$$

$$b = 2.$$

Resposta de l'apartat a)

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1.$$

- b) L'empresa ha tingut tres gerents, el primer quan $t \in [0,1]$, el segon quan $t \in (1,2]$ i el tercer quan $t \in (2,4]$. Determineu si amb tots els gerents el valor de mercat ha anat creixent. (1 punt)

b) El valor de mercat ha anat creixent amb tots els gerents?

Estudiem cada interval.

Primer gerent: $0 \leq t \leq 1$

$$g(t) = t^2 + 2.$$

Derivem:

$$g'(t) = 2t.$$

Com que

$$2t \geq 0,$$

la funció és **creixent**.

Segon gerent: $1 < t \leq 2$

$$g(t) = \frac{1}{t} + 2.$$

Derivem:

$$g'(t) = -\frac{1}{t^2}.$$

Sempre és negativa.

La funció és **decreixent**.

Tercer gerent: $2 < t \leq 4$

Ara

$$g(t) = t + \frac{2}{t^2}.$$

Derivem:

$$g'(t) = 1 - \frac{4}{t^3}.$$

Si $t > 2$,

$$t^3 > 8.$$

Per tant,

$$\frac{4}{t^3} < \frac{1}{2},$$

i

$$g'(t) > 0.$$

La funció és **creixent**.

Conclusió

- Primer gerent: **sí**.
- Segon gerent: **no**.
- Tercer gerent: **sí**.

Per tant,

No, amb el segon gerent el valor de mercat disminueix.
--

c) Determineu els màxims i mínims absoluts i relatius per al valor de mercat.

(0,5 punts)

c) Màxims i mínims absoluts i relatius

Ja sabem que:

- primer interval: creixent;
- segon: decreixent;
- tercer: creixent.

Cal mirar els extrems.

Valor en $t = 0$

$$g(0) = 2.$$

Valor en $t = 1$

$$g(1) = 3.$$

Valor en $t = 2$

$$g(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Valor en $t = 4$

$$g(4) = 4 + \frac{2}{16} = 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}.$$

Mínim absolut

El valor més petit és

$$g(0) = 2.$$

Màxim absolut

El valor més gran és

$$g(4) = \frac{33}{8}.$$

Màxim relatiu

En passar de creixent a decreixent,

$$t = 1$$

és un màxim relatiu.

Valor:

$$g(1) = 3.$$

Mínim relatiu

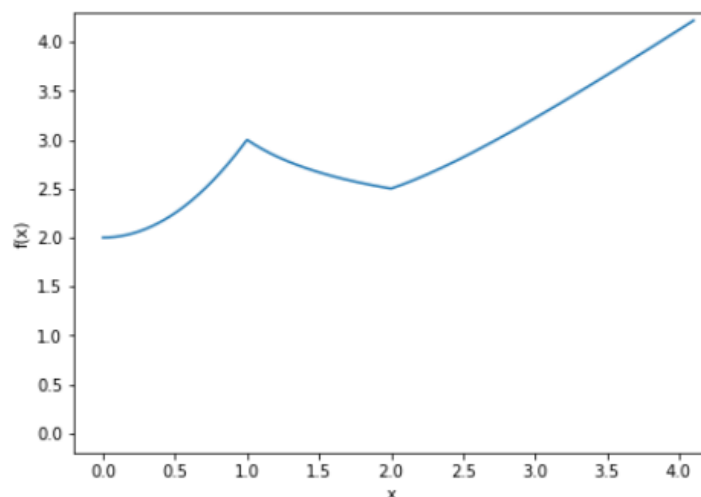
En passar de decreixent a creixent,

$$t = 2$$

és un mínim relatiu.

Valor:

$$g(2) = \frac{5}{2}.$$



- d) El salari d'un gerent a l'any és cent mil vegades la integral de la funció g durant el període que ha estat. Calculeu el salari del primer gerent. (1 punt)

d) Salari del primer gerent

El salari és

$$100\,000 \cdot \int_0^1 g(t) dt.$$

Com que

$$g(t) = t^2 + 2,$$

tenim

$$\int_0^1 (t^2 + 2) dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t \right]_0^1.$$

Substituint:

$$= \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

El salari és

$$100\,000 \cdot \frac{7}{3} = \frac{700\,000}{3}.$$

És a dir,

$\frac{700\,000}{3} \text{ €} \approx 233\,333,33 \text{ €}.$
