

Problema 2.A. Es considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a) & \text{si } x \leq 1 \\ (x + 1)^2 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 5x + \frac{b}{x + 1} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuïtat de la funció i determineu quins han de ser els valors a i b perquè siga contínua en tot punt. (0,75 punts)

a) Estudieu la continuïtat de la funció

Cada expressió és contínua en el seu interval de definició, per tant només cal estudiar els punts on canvia la definició:

- $x = 1$
- $x = 4$

Continuïtat en $x = 1$

Cal que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

Valor de la funció

Com $1 \leq 1$,

$$f(1) = \ln(1 + a).$$

Límit per la dreta

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 4.$$

Perquè siga contínua,

$$\ln(1 + a) = 4.$$

Apliquem l'exponencial als dos membres:

$$1 + a = e^4$$

i obtenim

$$a = e^4 - 1.$$

Continuïtat en $x = 4$

Cal igualar el límit per l'esquerra i el límit per la dreta.

Per l'esquerra

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} (x + 1)^2 = 25.$$

Com $x = 4$ pertany al segon interval,

$$f(4) = 25.$$

Per la dreta

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(5x + \frac{b}{x + 1} \right) = 20 + \frac{b}{5}.$$

Per tant,

$$20 + \frac{b}{5} = 25.$$

Multiplicant per 5,

$$100 + b = 125$$

i

$$b = 25.$$

Resposta de l'apartat a)

$$a = e^4 - 1, \quad b = 25.$$

- b) Suposem que $a = 54$ i que $b = 25$. Determineu el màxim absolut i el mínim absolut d'aquesta funció en l'interval $[-1, 5]$. (2 punts)

b) Suposem ara $a = 54$ i $b = 25$

La funció queda

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 54), & x \leq 1, \\ (x + 1)^2, & 1 < x \leq 4, \\ 5x + \frac{25}{x + 1}, & x > 4. \end{cases}$$

Cal trobar el màxim i el mínim absoluts en

$$[-1, 5].$$

1. Punts crítics

Primer interval

$$f(x) = \ln(x^2 + 54)$$

Derivem:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 54}.$$

Anul·lem:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + 54} &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

És un punt crític.

Segon interval

$$f(x) = (x + 1)^2$$

$$f'(x) = 2(x + 1).$$

$$2(x + 1) = 0$$

$$x = -1,$$

però no pertany a l'interval $(1, 4]$.

No hi ha punts crítics.

Tercer interval

$$f(x) = 5x + \frac{25}{x + 1}$$

$$f'(x) = 5 - \frac{25}{(x + 1)^2}.$$

Anul·lem:

$$5 = \frac{25}{(x + 1)^2}$$

$$(x + 1)^2 = 5$$

$$x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Cap pertany a $(4, 5]$.

2. Avaluem als punts importants

Cal calcular:

- extrems de l'interval,
- punts crítics,
- punts de canvi de definició.

En $x = -1$

$$f(-1) = \ln(55).$$

En $x = 0$

$$f(0) = \ln(54).$$

En $x = 1$

$$f(1) = \ln(55).$$

En $x = 4$

$$f(4) = 25.$$

En $x = 5$

$$f(5) = 25 + \frac{25}{6} = \frac{175}{6} \approx 29,17.$$

3. Comparació

Sabem que

$$\ln(54) \approx 3,989,$$

$$\ln(55) \approx 4,007.$$

La taula és

Punt	Valor
$x = -1$	$\ln 55 \approx 4,007$
$x = 0$	$\ln 54 \approx 3,989$
$x = 1$	$\ln 55 \approx 4,007$
$x = 4$	25
$x = 5$	$\frac{175}{6} \approx 29,17$

Resposta

Mínim absolut:

$$f(0) = \ln 54$$

Màxim absolut:

$$f(5) = \frac{175}{6}$$

- c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per aquesta funció, l'eix OX , la recta d'equació $x = 2$ i la recta d'equació $x = 3$. (0,75 punts)

c) Àrea entre la corba, l'eix OX i les rectes $x = 2$ i $x = 3$

Entre 2 i 3 la funció és

$$f(x) = (x + 1)^2.$$

Com és positiva,

$$A = \int_2^3 (x + 1)^2 dx.$$

Desenvolupem:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Per tant,

$$A = \int_2^3 (x^2 + 2x + 1) dx.$$

Una primitiva és

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + x.$$

Avaluem:

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_2^3.$$

En $x = 3$:

$$9 + 9 + 3 = 21.$$

En $x = 2$:

$$\frac{8}{3} + 4 + 2 = \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3}.$$

Finalment,

$$A = 21 - \frac{26}{3} = \frac{63 - 26}{3} = \frac{37}{3}.$$

$$A = \frac{37}{3} \text{ unitats}^2.$$