

Problema 2.B. Certa empresa tecnològica ofereix servici d'emmagatzematge de dades en el núvol. Els seus ingressos I (en unitats monetàries) depenen de la quantitat de dades emmagatzemades x (en terabytes), sent $I(x) = 400x$, i la seua funció de despeses G (en unitats monetàries) depèn també de la quantitat de dades emmagatzemades x (en terabytes), sent $G(x) = 4x^2 + 100$.

- a) Calculeu la quantitat de dades que maximitza el benefici (ingressos menys despeses), i indiqueu quin és el benefici màxim que pot obtenir l'empresa. (1 punt)

a) Quantitat de dades que maximitza el benefici

Pas 1. Escriure la funció benefici

El benefici és

$$B(x) = I(x) - G(x).$$

Substituïm:

$$B(x) = 400x - (4x^2 + 100).$$

Simplifiquem:

$$B(x) = -4x^2 + 400x - 100.$$

Pas 2. Derivar

$$B'(x) = -8x + 400.$$

Pas 3. Igualar a zero

$$-8x + 400 = 0.$$

$$8x = 400.$$

$$x = 50.$$

Pas 4. Comprovar que és un màxim

Derivada segona:

$$B''(x) = -8.$$

Com que

$$B''(x) < 0,$$

la funció té un màxim.

Pas 5. Calcular el benefici màxim

$$\begin{aligned} B(50) &= -4(50)^2 + 400(50) - 100. \\ &= -4 \cdot 2500 + 20000 - 100. \\ &= -10000 + 20000 - 100. \\ &= 9900. \end{aligned}$$

La quantitat òptima és

50 TB.

El benefici màxim és

9900 unitats monetàries.

- b) La ràtio ingressos/despeses mesura l'eficiència financera de l'empresa. Calculeu la quantitat de dades per als quals l'eficiència financera de l'empresa és màxima, i indiqueu quina és aquesta eficiència màxima. (1,5 punts)

b) Eficiència financera

L'eficiència és

$$E(x) = \frac{I(x)}{G(x)}.$$

Substituïm:

$$E(x) = \frac{400x}{4x^2 + 100}.$$

Simplifiquem dividint entre 4:

$$E(x) = \frac{100x}{x^2 + 25}.$$

Pas 1. Derivar

Apliquem la regla del quocient:

$$E'(x) = \frac{100(x^2 + 25) - 100x(2x)}{(x^2 + 25)^2}.$$

Simplifiquem:

$$\begin{aligned} &= \frac{100x^2 + 2500 - 200x^2}{(x^2 + 25)^2} \\ &= \frac{-100x^2 + 2500}{(x^2 + 25)^2}. \end{aligned}$$

Traiem factor comú:

$$E'(x) = \frac{100(25 - x^2)}{(x^2 + 25)^2}.$$

Pas 2. Igualar a zero

El denominador mai és zero.

Per tant,

$$25 - x^2 = 0.$$

$$x^2 = 25.$$

Com que $x \geq 0$,

$$x = 5.$$

Pas 3. Comprovar que és un màxim

- Si $x < 5$, $E'(x) > 0$.
- Si $x > 5$, $E'(x) < 0$.

Per tant, en $x = 5$ hi ha un màxim.

Pas 4. Calcular l'eficiència màxima

$$E(5) = \frac{100 \cdot 5}{25 + 25} = \frac{500}{50} = 10.$$

Resposta de l'apartat b)

L'eficiència és màxima quan

$$x = 5 \text{ TB.}$$

El seu valor és

$$10.$$

c) Calculeu $\int_0^2 G(x)^2 dx$.

(1 punt)

c) Calcular

$$\int_0^2 G(x)^2 dx.$$

Pas 1. Substituir $G(x)$

$$G(x) = 4x^2 + 100.$$

Per tant,

$$\int_0^2 (4x^2 + 100)^2 dx.$$

Pas 2. Desenvolupar el quadrat

Utilitzem

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(4x^2 + 100)^2 = 16x^4 + 800x^2 + 10000.$$

Pas 3. Integrar

$$\int_0^2 (16x^4 + 800x^2 + 10000) dx.$$

Una primitiva és

$$\frac{16}{5}x^5 + \frac{800}{3}x^3 + 10000x.$$

Pas 4. Avaluar entre 0 i 2

Quan $x = 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{16}{5} \cdot 32 + \frac{800}{3} \cdot 8 + 10000 \cdot 2. \\ & = \frac{512}{5} + \frac{6400}{3} + 20000. \end{aligned}$$

Posem-ho amb denominador 15:

$$\frac{1536}{15} + \frac{32000}{15} + \frac{300000}{15} = \frac{333536}{15}.$$

Quan $x = 0$, val 0.

Per tant,

$$\int_0^2 G(x)^2 dx = \frac{333536}{15}.$$

Aproximadament,

$$22235,73.$$