

Problema 2.B. Atesa la funció:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$$

Es demana:

a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos de coordenades.

(0,5 punts)

a) Domini i punts de tall amb els eixos

Domini

Una funció racional no està definida quan el denominador és zero.

Cal resoldre

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 2, \quad x = -2.$$

Per tant,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Tall amb l'eix OX

Per tallar l'eix OX ha de complir-se

$$f(x) = 0.$$

Això ocorre quan el numerador és zero.

Resolem

$$x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Calculem el discriminant

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0.$$

No hi ha arrels reals.

Per tant,

No talla l'eix OX.

Tall amb l'eix OY

Posem

$$x = 0.$$

$$f(0) = \frac{4}{-4} = -1.$$

Per tant,

(0, -1).

b) Les asímtotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(0,5 punts)

b) Assímptotes

Assímptotes verticals

Són els punts on el denominador és zero i el numerador no.

En $x = 2$

Numerador:

$$2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 4.$$

No és zero.

Per tant,

$$x = 2$$

és una assímptota vertical.

En $x = -2$

Numerador:

$$(-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12.$$

No és zero.

Per tant,

$$x = -2$$

també és una assímptota vertical.

Assímptota horitzontal

Els graus del numerador i del denominador són iguals.

L'assímptota és el quocient dels coeficients principals:

$$y = 1.$$

- c) Els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals, si n'hi ha, i el valor d'aquests. (2 punts)

c) Creixement, decreixement i extrems

Derivada

Apliquem la regla del quocient.

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 4)^2}.$$

Simplifiquem el numerador.

Primer desenvolupem

$$(2x - 2)(x^2 - 4) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8.$$

Després

$$2x(x^2 - 2x + 4) = 2x^3 - 4x^2 + 8x.$$

Restem

$$2x^3 - 2x^2 - 8x + 8 - (2x^3 - 4x^2 + 8x).$$

Resulta

$$2x^2 - 16x + 8.$$

Traiem factor comú

$$2(x^2 - 8x + 4).$$

Així,

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 8x + 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

Punts crítics

Igualem el numerador a zero.

$$x^2 - 8x + 4 = 0.$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

Per tant,

$$x = 4 - 2\sqrt{3}, \quad x = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Estudi del signe

El denominador sempre és positiu (està elevat al quadrat).

Només estudiem el numerador.

Com és una paràbola oberta cap amunt,

- és positiva fora de les arrels;
- és negativa entre elles.

Tenint en compte les discontinuïtats en $x = \pm 2$:

Interval	Signe de $f'(x)$
$(-\infty, -2)$	+
$(-2, 2)$	+
$(2, 4 - 2\sqrt{3})$	+
$(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$	-
$(4 + 2\sqrt{3}, \infty)$	+

Creixement

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 4 - 2\sqrt{3}) \cup (4 + 2\sqrt{3}, \infty)$$

Decreixement

$$(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$$

Màxim local

En

$$x = 4 - 2\sqrt{3}$$

la derivada passa de positiva a negativa.

Hi ha un màxim.

Calculem el valor.

Com

$$(4 - 2\sqrt{3})^2 = 28 - 16\sqrt{3},$$

s'obté

$$f(4 - 2\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}.$$

Per tant,

$\text{Màxim local } (4 - 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}).$
--

Mínim local

En

$$x = 4 + 2\sqrt{3}$$

la derivada passa de negativa a positiva.

Hi ha un mínim.

El seu valor és

$$f(4 + 2\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}.$$

Per tant,

$\text{Mínim local } (4 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}).$
--

- d) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors. (0,5 punts)

d) Esbós de la gràfica

La gràfica compleix:

- Domini:

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

- Assímptotes verticals:

$$x = -2, \quad x = 2.$$

- Assímptota horitzontal:

$$y = 1.$$

- Tall amb l'eix OY:

$$(0, -1).$$

- No talla l'eix OX.
- Creix en

$$(-\infty, -2), (-2, 2), (2, 4 - 2\sqrt{3}), (4 + 2\sqrt{3}, \infty).$$

- Decreix en

$$(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}).$$

- Màxim local

$$(4 - 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}).$$

- Mínim local

$$(4 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}).$$

