

Problema 3. Una consultoria realitza una prova de qualitat a noves empreses per a detectar si tenen una gestió adequada. Després d'anys d'estudis, s'ha arribat a la conclusió que el 70% de les empreses estudiades són ben gestionades i que, en aquest cas, la prova indica que és ben gestionada en el 90% dels casos. Se sap que la probabilitat que la prova detecte com a ben gestionada una empresa que és mal gestionada és del 5%.

- a) Calculeu la probabilitat que una empresa siga mal gestionada i la prova haja indicat que és mal gestionada. (1 punt)

Definim els successos:

- B : l'empresa està **ben gestionada**.
- M : l'empresa està **mal gestionada**.
- P_B : la prova indica **ben gestionada**.
- P_M : la prova indica **mal gestionada**.

Les dades són:

$$P(B) = 0,70$$

$$P(M) = 1 - 0,70 = 0,30$$

$$P(P_B|B) = 0,90$$

Per tant,

$$P(P_M|B) = 1 - 0,90 = 0,10.$$

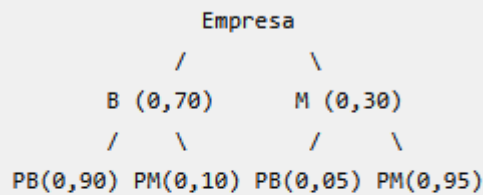
També sabem que

$$P(P_B|M) = 0,05,$$

i, per tant,

$$P(P_M|M) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Arbre de probabilitats



Les probabilitats de cada branca són:

- $P(B \cap P_B) = 0,70 \cdot 0,90 = 0,63$
- $P(B \cap P_M) = 0,70 \cdot 0,10 = 0,07$
- $P(M \cap P_B) = 0,30 \cdot 0,05 = 0,015$
- $P(M \cap P_M) = 0,30 \cdot 0,95 = 0,285$

a) Probabilitat que siga mal gestionada i la prova indique que és mal gestionada

Cal calcular

$$P(M \cap P_M).$$

Multiplicant les probabilitats de la branca:

$$\begin{aligned} P(M \cap P_M) &= P(M) \cdot P(P_M|M) \\ &= 0,30 \cdot 0,95 \\ &= \boxed{0,285.} \end{aligned}$$

Resposta:

$$\boxed{P(M \cap P_M) = 0,285}$$

- b) Si la prova ha indicat que una empresa és ben gestionada, quina és la probabilitat que l'empresa siga ben gestionada? (1 punt)

b) Si la prova indica que és ben gestionada, quina és la probabilitat que realment siga ben gestionada?

Cal calcular

$$P(B|P_B).$$

Apliquem el teorema de Bayes:

$$P(B|P_B) = \frac{P(B \cap P_B)}{P(P_B)}.$$

Primer calculem

$$\begin{aligned} P(P_B) &= P(B \cap P_B) + P(M \cap P_B) \\ &= 0,63 + 0,015 = 0,645. \end{aligned}$$

Ara,

$$\begin{aligned} P(B|P_B) &= \frac{0,63}{0,645} \\ &= 0,9767. \end{aligned}$$

Per tant,

$$P(B|P_B) \approx 0,977.$$

És a dir,

$$97,7\%.$$

c) Calculeu la probabilitat que el resultat de la prova siga incorrecte.

(1 punt)

c) Probabilitat que el resultat de la prova siga incorrecte

La prova és incorrecta en dos casos:

- empresa ben gestionada però la prova diu que no;
- empresa mal gestionada però la prova diu que sí.

Per tant,

$$P(\text{error}) = P(B \cap P_M) + P(M \cap P_B).$$

Substituint:

$$0,07 + 0,015 = 0,085.$$

Per tant,

$$P(\text{error}) = 0,085.$$

És a dir,

$$8,5\%.$$