

4.1 Considerem la funció real de variable real $f(x) = |2x^2 - 3|$ per a $-1 \leq x \leq 5$.

4.1.1 (0.75 punts) Troba els intervals de creixement i decreixement de la funció f en l'interval $[-1, 5]$.

Es considera la funció

$$f(x) = |2x^2 - 3|, \quad -1 \leq x \leq 5.$$

Com que hi ha un valor absolut, primer estudiem el signe de $2x^2 - 3$.

$$2x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \approx \pm 1,225.$$

En l'interval $[-1, 5]$ només apareix

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Per tant,

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2, & -1 \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2}, \\ 2x^2 - 3, & \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 5. \end{cases}$$

4.1.1 Creixement i decreixement

Derivada

Per al primer tram,

$$f(x) = 3 - 2x^2,$$

$$f'(x) = -4x.$$

- Si $x < 0$, $f'(x) > 0$: creix.
- Si $x > 0$, $f'(x) < 0$: decreix.

Per al segon tram,

$$f(x) = 2x^2 - 3,$$

$$f'(x) = 4x > 0.$$

Per tant, creix.

Conclusions

- Creix en

$$[-1, 0] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, 5 \right].$$

- Decreix en

$$\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2} \right].$$

4.1.2 (0.5 punts) Calcula els valors màxims i mínims absoluts de la funció f en l'interval $[-1,5]$.

4.1.2 Màxim i mínim absoluts

Cal estudiar els punts crítics i els extrems de l'interval.

Als extrems

$$f(-1) = |2 - 3| = 1.$$

$$f(5) = |50 - 3| = 47.$$

Punt crític

En

$$x = 0,$$

$$f(0) = 3.$$

Punt on canvia l'expressió

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0.$$

Comparació

$$0 < 1 < 3 < 47.$$

Per tant,

- Mínim absolut

$$0$$

assolit en

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

- Màxim absolut

$$47$$

assolit en

$$x = 5.$$

4.1.3 (0.25 punts) Representa la funció f .

4.1.3 Representació gràfica

La gràfica està formada per dues paràboles:

- De -1 fins a $\frac{\sqrt{6}}{2}$:

$$y = 3 - 2x^2,$$

(paràbola oberta cap avall).

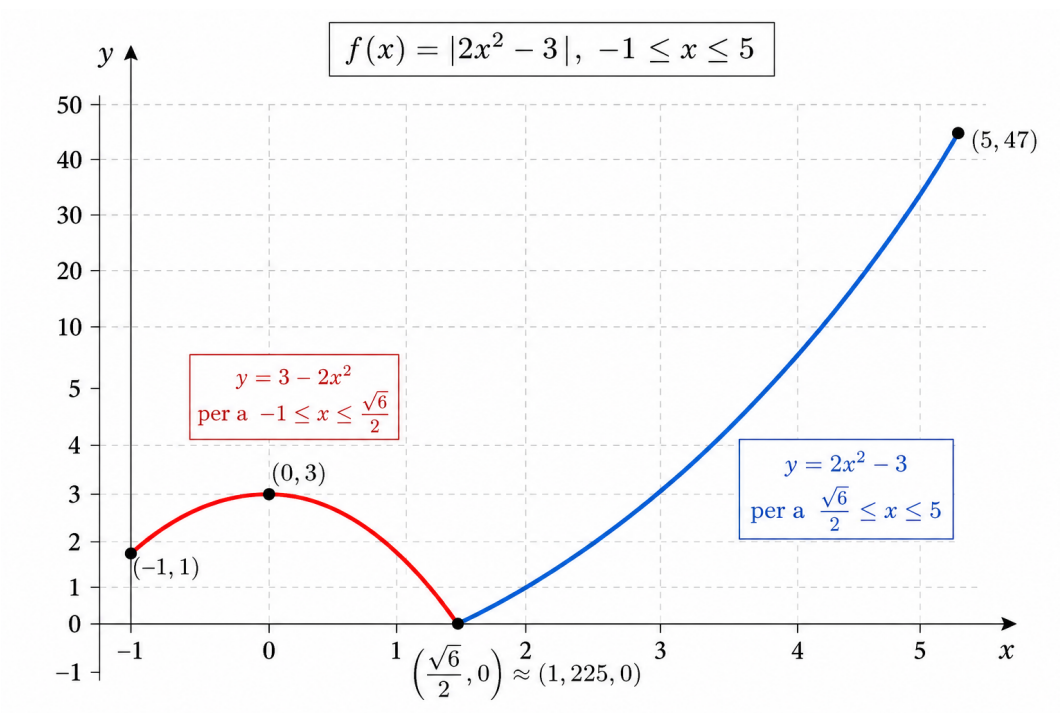
- De $\frac{\sqrt{6}}{2}$ fins a 5 :

$$y = 2x^2 - 3,$$

(paràbola oberta cap amunt).

Punts principals:

Punt	Valor
$(-1, 1)$	extrem esquerre
$(0, 3)$	màxim local
$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$	mínim absolut
$(5, 47)$	màxim absolut



4.1.4 (1 punt) Calcula l'àrea del recinte limitat per la corba d'equació $y = f(x)$, i les rectes $x = -1$, $x = 5$ i $y = 0$.

4.1.4 Àrea limitada per la corba, l'eix OX i les rectes $x = -1$ i $x = 5$

Com que

$$f(x) \geq 0,$$

l'àrea és

$$A = \int_{-1}^5 f(x) dx.$$

Cal separar-la:

$$A = \int_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} (3 - 2x^2) dx + \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 (2x^2 - 3) dx.$$

Primera integral

$$\int (3 - 2x^2) dx = 3x - \frac{2}{3}x^3.$$

Com que

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{6}}{4},$$

resulta

$$A_1 = \left(3x - \frac{2}{3}x^3\right)_{-1}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} = 4 + \sqrt{6}.$$

Segona integral

$$\int (2x^2 - 3) dx = \frac{2}{3}x^3 - 3x.$$

Aleshores

$$A_2 = \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x \right)_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^5 = \frac{643}{6} + \sqrt{6}.$$

Àrea total

$$A = 4 + \sqrt{6} + \frac{643}{6} + \sqrt{6}.$$

$$A = \frac{667}{6} + 2\sqrt{6}.$$

Valor aproximat:

$$A \approx 115,73 \text{ unitats}^2.$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}, \quad h = \frac{20}{9x} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x}, \quad V_{\max} = \frac{5\sqrt{3}}{9}x = \frac{10\sqrt{3}}{27}\sqrt{5\sqrt{3}}.$$