

### Exercici 1

[2,5 punts en total]

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| Puntuació total de l'exercici 1 |  |
|---------------------------------|--|

Considereu la paràbola  $y=f(x)$ , amb  $f(x)=-x^2+5x$ , i la hipèrbola  $y=g(x)$ , amb  $g(x)=8-\frac{8}{x+1}$ .

1.1. En quants punts es tallen les gràfiques d'aquestes dues funcions? Calculeu-los tots.

[0,75 punts]

|                            |  |
|----------------------------|--|
| Puntuació de l'apartat 1.1 |  |
|----------------------------|--|

### Exercici 1

1.1. Per trobar els punts de tall entre paràbola i hipèrbola, resollem l'equació  $f(x) = g(x)$ :

$$-x^2 + 5x = 8 - \frac{8}{x+1}$$

$$(x+1)(-x^2 + 5x) = 8x + 8 - 8$$

$$-x^3 + 4x^2 + 5x = 8x$$

$$x(-x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Les solucions són  $x = 0$  i  $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ . Per tant, es tallen exactament en tres punts. Calculant les seves imatges, es tracta de  $(0, f(0)) = (0, 0)$ ,  $(1, f(1)) = (1, 4)$  i  $(3, f(3)) = (3, 6)$ .

1.2. Calculeu l'àrea de la regió situada entre les dues corbes des de  $x = 1$  fins a  $x = 3$ .

[1 punt]

|                            |  |
|----------------------------|--|
| Puntuació de l'apartat 1.2 |  |
|----------------------------|--|

1.2. Com que no hi ha més punts de tall que els tres calculats a l'apartat anterior, entre 1 i 3 les gràfiques no es toquen (de fet,  $f$  està per damunt de  $g$ ) i l'àrea demanada és

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^3 \left( -x^2 + 5x - 8 + \frac{8}{x+1} \right) \, dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 8x + 8 \ln(x+1) \right]_1^3 = \\ &= \left( -\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 24 + 8 \ln(4) \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 8 + 8 \ln(2) \right) = -\frac{26}{3} + 4 + 8 \ln(2) \\ &= 0.878 \dots \, u^2. \end{aligned}$$

- 1.3. Comproveu que  $f(x)$  té les arrels als punts d'abscissa  $x=0$  i  $x=5$ , i que l'ordenada del vèrtex de la paràbola  $y=f(x)$  és  $y=6,25$ . Justifiqueu que  $y=f(x)$  és l'única paràbola que existeix amb aquestes dues propietats.

[0,75 punts]

|                            |  |
|----------------------------|--|
| Puntuació de l'apartat 1.3 |  |
|----------------------------|--|

1.3. Efectivament  $f(x)$  té arrels als punts d'abscisses 0 i 5,  $f(0) = -0^2 + 0 = 0$  i  $f(5) = -5^2 + 25 = 0$ . La paràbola  $y = f(x)$  té el vèrtex situat al punt  $-2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$ , que efectivament té per imatge  $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = 6,25$ .

A més,  $y = f(x)$  és l'única paràbola amb aquestes dues propietats ja que qualsevol que les compleixi haurà de ser de la forma  $f(x) = ax(x - 5)$ ; i com que el vèrtex ha d'estar al punt mig de les dues arrels  $x = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$  i ha de tenir imatge 6,25, tindrem

$$6,25 = f\left(\frac{5}{2}\right) = a \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} - 5\right) = a \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) = -6,25 a.$$

Per tant  $a = -1$ , i l'única paràbola és  $f(x) = -1 \cdot x(x - 5) = -x^2 + 5x$ .