

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	
---------------------------------	--

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que està format per tres plans a l'espai i depèn del paràmetre real m :

$$\left. \begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array} \right\}.$$

2.1. Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m .

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.1	
----------------------------	--

Exercici 2

2.1.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Calculant el determinant de la matriu A , tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + m^2 + 1 - 3m - 1 - m = m^2 - 4m + 3.$$

Per obtenir els valors crítics, fem

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 3, 1.$$

En el cas $m \neq 1, 3$, tenim $|A| \neq 0$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3$ i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible determinat.

En el cas $m = 3$, tenim $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ per tant $\text{rang}(A) = 2$. Per altra banda,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

i deduïm que $\text{rang}(\bar{A}) = 3$ i que el sistema és incompatible en aquest cas.

Finalment, en el cas $m = 1$, tenim $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\text{rang}(A) = 2$, i també $\text{rang}(\bar{A}) = 2$ per tenir la primera i tercera files iguals. En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2. Interpreteu geomètricament aquest sistema per a tots els valors del paràmetre m i resoleu-lo, si és possible, per al cas $m = 1$.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.2	
----------------------------	--

2.2.

Es tracta de tres plans a l'espai, que estan en diverses posicions relatives depenent del valor del paràmetre: d'acord amb la discussió de l'apartat anterior, si $m \neq 1, 3$, el sistema és compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en un únic punt comú. Si $m = 3$ és incompatible, cosa que vol dir que no tenen cap punt en comú: això es pot veure directament observant que, en aquest cas, el primer pla, $x + 3y + z = 4$, i el segon, $x + 3y + z = 5$, són paral·lels i no coincidents. Finalment, si $m = 1$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i els tres plans s'intersequen en una recta comuna. Per trobar-ne l'equació cal resoldre el sistema en aquest cas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow[F_1=F_3] \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{array} \right\} \xRightarrow[z=\lambda]{} \left. \begin{array}{l} x + y = 4 - \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 5 - \lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 3\lambda - 5 + \lambda}{2} = \frac{7 - 2\lambda}{2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - \lambda \\ 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5 - \lambda - 4 + \lambda}{2} = \frac{1}{2}.$$

La solució del sistema són tots els punts de la forma $\left(\frac{7-2\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \lambda\right)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. És a dir, la intersecció dels tres plans, en aquest cas, consisteix en la recta d'equació $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda(-1, 0, 1)$.

2.3. Per a $m = 1$, és possible afegir una quarta equació de manera que el sistema resultant sigui compatible determinat i tingui com a solució $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? Raoneu la resposta.

[0,5 punts]

Puntuació de l'apartat 2.3	
----------------------------	--

2.3.

Per a $m = 1$, el sistema té infinites solucions, una de les quals és $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, precisament la que correspon a $\lambda = \frac{1}{2}$. Per tant, qualsevol nova equació que també tingui aquest punt com a solució, per exemple $x = 3$, i que doni una matriu de coeficients total de rang 3, convertirà el sistema en compatible determinat amb el punt desitjat com a única solució; l'equació proposada ho compleix:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$