

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	
---------------------------------	--

Considereu les matrius $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on k és un nombre real qualsevol.

2.1. Calculeu els valors de k per als quals MN és invertible.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.1	
----------------------------	--

Exercici 2

2.1. El producte MN i el seu determinant donen

$$MN = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3k-3 & 3 \\ 3k-3-k+1 & k-1-2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3k+6 & 3 \\ 2k-2 & k-3 \end{vmatrix} = 3k^2 + 6k - 9k - 18 - 6k + 6 = 3(k^2 - 3k - 4),$$

que és zero per als valors $k = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1$. Per tant, la matriu MN és invertible per a tot k excepte $k = 4$ i $k = -1$.

2.2. Calculeu els valors de k per als quals NM és invertible.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.2	
----------------------------	--

2.2. El producte NM dona

$$NM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k-1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Com que la primera columna és igual a la segona menys k vegades la tercera, el determinant és sempre zero i la matriu NM no és invertible per cap valor de k . Alternativament, es pot calcular el determinant i veiem que dóna zero independentment de k :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 3k-3 & 3k-3 & 0 \\ 2k-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} &= 2(3k-3) \begin{vmatrix} k+8 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2(3k-3)(-k-8+1+k-1+8) = 0. \end{aligned}$$

2.3. Estudieu per a quins valors reals de m , n i k el sistema $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ és compatible indeterminat.
[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.3	
----------------------------	--

2.3. En forma matricial es tracta del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ k-1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també, independentment dels tres paràmetres. I com que hi ha 3 incògnites, aquest sistema és compatible indeterminat per qualsevol valors de m , de n i de k .