

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	
---------------------------------	--

En una ciutat s'ha estudiat la relació entre els hàbits de lectura i la pràctica d'esport en l'alumnat de batxillerat. Per a fer-ho, s'han formulat les dues preguntes següents a l'alumnat d'aquesta etapa educativa: «Llegeixes com a mínim dos llibres al mes?» i «Practiques algun esport almenys quatre hores a la setmana?»

Dels resultats de l'enquesta, es desprèn que el 60 % llegeixen com a mínim dos llibres al mes, dels quals el 70 % practiquen algun esport un mínim de quatre hores a la setmana. També s'observa que, d'entre els que no llegeixen un mínim de dos llibres al mes, el 50 % fan menys de quatre hores setmanals d'esport.

Si escollim a l'atzar un alumne/a de batxillerat d'aquesta ciutat:

3.1. Quina és la probabilitat que faci esport almenys quatre hores setmanals?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	
----------------------------	--

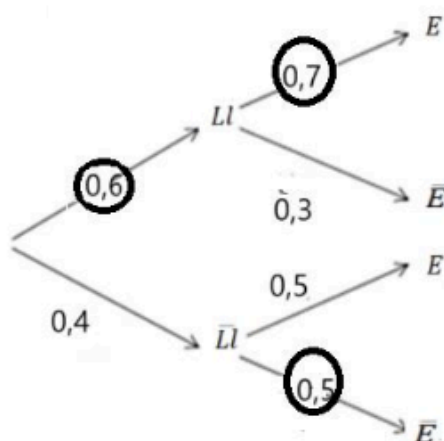
Exercici 3

3.1. Considerem els successos aleatoris següents:

Ll = "llegir almenys dos llibres al mes",

E = "fer un mínim de quatre hores setmanals d'esport".

Les dades del problema ens diuen que $P(Ll) = 0,6$, $P(E|Ll) = 0,7$, i $P(\bar{E}|\bar{Ll}) = 0,5$. Podem visualitzar-les en el diagrama d'arbre adjunt:



Pel teorema de la probabilitat total:

$$\begin{aligned}P(E) &= P(LI) \cdot P(E|LI) + P(\overline{LI}) \cdot P(E|\overline{LI}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 = \\&= 0,42 + 0,20 = 0,62.\end{aligned}$$

- 3.2. Si sabem que aquest alumne/a fa esport menys de quatre hores setmanals, quina probabilitat hi ha que llegeixi almenys dos llibres al mes?

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	
----------------------------	--

3.2. Per la fórmula de Bayes:

$$P(LL|\bar{E}) = \frac{P(LL \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\bar{E}|LL) \cdot P(LL)}{1 - P(E)} = \frac{0,3 \cdot 0,6}{1 - 0,62} = 0,47 \dots$$

L'Alba és una estudiant de batxillerat que ha anat anotant durant tot el curs quantes hores dedicava a la setmana a llegir i quantes a fer esport. Per a cada setmana té apuntat un nombre real x que correspon a la quantitat d'hores de lectura i que oscilla entre 1 i 6, i un nombre real y que correspon a la quantitat d'hores de pràctica esportiva. Ha observat que la relació $y = 7 - x + \ln(2x - 1)$ s'ajusta força bé a les dades que ha anotat.

3.3. Calculeu, segons aquest model, quin és el màxim i el mínim d'hores per setmana que l'Alba ha dedicat a practicar esport.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 3.3	
----------------------------	--

3.3. Cal trobar els valors màxim i mínim absoluts de la funció $f(x) = 7 - x + \ln(2x - 1)$ en l'interval $[1, 6]$. La derivada de $f(x)$ és $f'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1}$, que s'anul·la només per $x = \frac{3}{2}$. Aquest punt crític es correspon a un màxim local, ja que la funció (a la vista del signe de la derivada) creix per $x < \frac{3}{2}$ i decreix per $x > \frac{3}{2}$. Com que $f(1) = 7 - 1 + \ln 1 = 6$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 7 - \frac{3}{2} + \ln 2 \approx 6,19$, i $f(6) = 7 - 6 + \ln 11 \approx 3,4$, deduïm que el màxim i mínim absoluts de la funció a l'interval $[1, 6]$ són als punts $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 6,19$ i $f(6) \approx 3,4$, respectivament. Per tant, segons aquest model, l'Alba ha practicat entre un mínim de 3,4 i un màxim de 6,19 hores per setmana d'esport.