

OPCIÓ A

L'alcalde d'un poble de Catalunya encarrega a l'arquitecte municipal el disseny d'un parc infantil que es construirà en un terreny públic. Per a complir la normativa vigent, en el parc hi ha d'haver dos espais ben delimitats: un per a una boca de reg —el qual, segons l'arquitecte, ha de tenir forma circular—, i un altre per a una caseta on es guardin les eines de manteniment —el qual ha de tenir forma quadrada. Per motius estètics, l'arquitecte vol delimitar cadascun d'aquests dos espais amb una barana de forja. Sabent que les dues baranes mesuren exactament 10 m de longitud en total, quina mida ha de tenir la barana de cada espai per tal que la suma de les superfícies dels dos espais sigui la més petita possible? Quina és aquesta superfície mínima?

OPCIÓ A.

Anomenem x a la longitud en metres del primer tros de barana, amb el qual es farà el tancat circular; de l'altre tros, de $10 - x$ metres de longitud, se'n farà el tancat quadrat. Com que x ha de ser el perímetre d'una circumferència, el seu radi serà $r = \frac{x}{2\pi}$, i l'àrea d'aquest espai circular delimitat valdrà $A_1 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$. Per altra banda, com que $10 - x$ és el perímetre d'un quadrat, el seu costat serà $c = \frac{10-x}{4}$ i l'àrea d'aquest espai quadrat valdrà $A_2 = \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$. Així la funció a minimitzar és

$$A(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}.$$

Derivem i busquem els punts crítics

$$A'(x) = \frac{(8 + 2\pi)x - 20\pi}{16\pi} = 0 \rightarrow x = \frac{20\pi}{8 + 2\pi} \simeq 4,4 \text{ m.}$$

Per assegurar que es tracta d'un mínim, podem fer la segona derivada i comprovar que és positiva:

$$A''(x) = \frac{8 + 2\pi}{16\pi} > 0.$$

Així doncs, per tal de minimitzar la superfície total dels dos espais, l'arquitecte d'aquest poble haurà de fer un tancat circular amb 4,4 m de barana i un tancat quadrat amb els 5,6 m restants. La superfície total dels dos tancats serà de

$$A(4,4) = \frac{(4 + \pi) \cdot 4,4^2 - 20\pi \cdot 4,4 + 100\pi}{16\pi} \simeq 3,5 \text{ m}^2.$$