

OPCIÓ B

Considereu els punts de l'espai $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ i $R = (1, 1, 1)$.

4.1. Calculeu l'equació del pla que conté els punts P , Q i R .

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	
----------------------------	--

4.1.

Comencem trobant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 2)$. El vector normal al pla buscat és

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 2k - i - 4j = (-5, -4, 2).$$

Així doncs el pla buscat té equació de la forma $5x + 4y - 2z + D = 0$. Substituint les coordenades del punt R a l'equació anterior deduïm $D = -7$ i, per tant, l'equació buscada és

$$\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0.$$

4.2. Comproveu que l'àrea del triangle ΔPQR és $\frac{3\sqrt{5}}{2}u^2$.
[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	
----------------------------	--

4.2.

i pensem el triangle ΔPQR amb base PQ , aquesta mesura

$$d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Per altra banda, la recta $\overline{PQ}$ té equació

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, -2, 1) = (1 + 2\lambda, -2\lambda, -1 + \lambda),$$

i vector director $(2, -2, 1)$. Per tant, el pla perpendicular que passa per R té equació de la forma $2x - 2y + z + D = 0$, amb $2 - 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$. I la projecció de R sobre la recta $\overline{PQ}$ serà la intersecció del pla $2x - 2y + z - 1 = 0$ amb la recta $\overline{PQ}$, és a dir

$$2(1 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) + (-1 + \lambda) - 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0,$$

és el punt $(1, 0, -1)$ (és casualitat que sigui P ; això vol dir que l'angle $\widehat{RPQ}$ és recte). Així l'àrea del triangle ΔPQR és

$$\begin{aligned} \text{Àrea}(PQR) &= \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = \frac{d(P, Q) \cdot d(P, R)}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1+1)^2}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{2} u^2. \end{aligned}$$

Alternativament, també podem calcular l'àrea més ràpidament, aprofitant el producte vectorial de l'apartat anterior i la fórmula

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{45} = \frac{3}{2} \sqrt{5} u^2.$$

4.3. Determineu les condicions que han de complir les coordenades d'un quart punt $S = (x, y, z)$ per tal que P, Q, R i S formin un tetraedre de volum 1. (El volum del tetraedre format pels

punts P, Q, R i S és: $\text{volum}(PQRS) = \frac{\text{àrea}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$.)

[1 punt]

acció de l'apartat 4.3

4.3.

El volum del tetraedre determinat pels punts P, Q, R, S és

$$\text{Volum}(PQRS) = \frac{\text{Àrea}(PQR) \cdot \text{alçada}}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot d(S, \pi)}{3}.$$

Com que la distància del punt $S = (x, y, z)$ al pla $\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0$ és

$$d(S, \pi) = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}},$$

el lloc geomètric dels punts S tals que el tetraedre format per P, Q, R, S tingui volum 1 ve donat per

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}}}{3} = 1,$$

$$5x + 4y - 2z - 7 = \pm 6,$$

és a dir, són dos plans paral·lels al pla π , d'equacions

$$5x + 4y - 2z - 1 = 0, \quad i \quad 5x + 4y - 2z - 13 = 0.$$