

Exercici 4

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	
--	--

A en Bernat l'han contractat com a gerent d'una empresa que fabrica paraigües després que el gerent anterior fos acomiadat per no guardar convenientment la documentació. Aquesta empresa fabrica dos models de paraigües: paraigües plegables i paraigües bastó.

OPCIÓ B

- 4.1. Tenint en compte el cost de fabricar i emmagatzemar els paraigües plegables, la funció que expressa el benefici, en milers d'euros, que resulta de fabricar aquest producte és $p(x) = x(3 - x)$, en què x representa el nombre de paraigües fabricats, en centenars d'unitats. Considerant els mateixos factors, la funció de benefici dels paraigües bastó és $b(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 2x$. L'empresa fabricarà el nombre de paraigües de cada tipus que maximitzi la seva funció de beneficis.

Amb quin dels dos productes es necessita una menor quantitat de paraigües per a assolir el màxim de beneficis? Amb quin dels dos productes s'obtenen més beneficis?

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	
----------------------------	--

OPCIÓ B

- 4.1. Calculem les funcions derivades per trobar els punts on s'assoleixen el màxim de beneficis de cada un dels dos productes

$$p'(x) = 3 - 2x$$

$$b'(x) = -\frac{4}{5}x + 2$$

Igualant aquestes derivades a 0, trobarem els candidats a màxim, que són

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$b'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$$

Observem que en aquests punts hi ha un màxim perquè si mirem el signe de les derivades la primera passa de ser positiva a negativa en $x = 1,5$ i el mateix passa amb la segona en $x = 2,5$. Per tant les funcions passen de ser creixents a ser decreixents en aquests punts i, per tant, hi ha un màxim.

Per tant, amb els paraigües plegables s'assoleix el màxim de beneficis amb menys paraigües. Caldrà fabricar 150 paraigües plegables i 250 de bastó.

Ara estudiem quin és el valor màxim per les dues funcions, i obtenim

$$p(1,5) = 2,25$$

$$b(2,5) = 2,5$$

Per tant, encara que els paraigües plegables assoleixin el màxim de beneficis amb menys quantitat de paraigües, els beneficis obtinguts amb els paraigües bastó és superior. Concretament obtenim un benefici de 2250 euros amb els paraigües plegables i un benefici de 2500 euros amb els paraigües bastó.

- 4.2. Un dia arriben a l'empresa dos lots de paraigües bastó que havia encarregat el gerent anterior per analitzar dues maneres diferents de tractar la tela impermeable: mitjançant la impregnació amb un nou producte químic o mitjançant un recobriment de tefló. Entre els dos lots, hi ha 60 paraigües amb la tela recoberta de tefló i 80 paraigües impermeabilitzats amb el mètode d'impregnació. Sabem que un 98 % dels paraigües amb recobriment

de tefló aguanten bé la pluja, però només el 95 % dels que han rebut el tractament d'impregnació l'aguanten bé.

En sortir de la feina, cau un xàfec sobtat i en Bernat agafa un dels nous paraigües, però té la mala sort que és un dels defectuosos i queda ben xop. Quina és la probabilitat que el paraigua que ha agafat sigui dels que estan recoberts de tefló?

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 4.2	
----------------------------	--

4.2. Considerem els esdeveniments

T =el paraigua és de tela recoberta de tefló,

I =el paraigua és de tela impregnada i

D =la tela del paraigua és defectuosa i no protegeix de la pluja.

Per les dades de l'enunciat sabem que $P(T) = \frac{60}{60+80} = \frac{3}{7}$, perquè tenim 60 paraigües de tefló i 80 de tela impregnada entre els dos lots i, de la mateixa manera, $P(I) = \frac{4}{7}$.

També sabem que $P(D|T) = 0.02$ (perquè el 98% de paraigües de tefló aguanten bé la pluja) i que $P(D|I) = 0.05$.

Pel la fórmula de Bayes sabem que la probabilitat demanada es pot calcular de la següent manera

$$P(T|D) = \frac{P(D|T) \cdot P(T)}{P(D)}$$

Ens falta saber la probabilitat del denominador però per la fórmula de les probabilitats totals (o fent un diagrama d'arbre) obtenim que

$$P(D) = P(D|T) \cdot P(T) + P(D|I) \cdot P(I)$$

És a dir,

$$P(D) = 0,02 \cdot \frac{3}{7} + 0,05 \cdot \frac{4}{7} = 0,0371.$$

Per tant,

$$P(T|D) = \frac{0,02 \cdot \frac{3}{7}}{0,037} = 0,2310.$$

És a dir, la probabilitat de que el paraigua defectuós que hem agafat sigui de tela recoberta de tefló és de 0,231.