

Problema 1.A. Albert, Brauli i Carles són amics i viuen en un xicotet poble, en tres cases diferents que podem suposar situades en línia recta alineades amb l'ajuntament del poble. Si prenem com a punt 0 aquest ajuntament i A, B, C les posicions en la recta de cadascuna de les cases dels amics a l'ajuntament sabem que aquestes posicions sumen 3000 i que $A < 0 < B < C$. A més, la distància entre la casa d'Albert i la casa de Brauli és dues vegades la distància de l'ajuntament a casa de Carles. Finalment, la distància entre la casa d'Albert i la casa de Carles és tres vegades la distància de l'ajuntament a casa de Brauli. Determineu les posicions A, B i C de les cases. Recordeu que la distància entre dues posicions A i B amb $A < B$ és $B - A$.



(Plantejament correcte 1,5 punts --- Resolució correcta 2 punts)

1. Plantegem el sistema

Tenim les posicions:

$$A < 0 < B < C$$

Primera condició

Les tres posicions sumen 3000:

$$A + B + C = 3000$$

Segona condició

La distància entre Albert i Brauli és el doble de la distància de l'Ajuntament a Carles:

$$B - A = 2C$$

Passem-ho tot al mateix costat:

$$-A + B - 2C = 0$$

Tercera condició

La distància entre Albert i Carles és el triple de la distància de l'Ajuntament a Brauli:

$$C - A = 3B$$

Passem-ho tot al mateix costat:

$$-A - 3B + C = 0$$

Per tant, el sistema és:

$$\begin{cases} A + B + C = 3000 \\ -A + B - 2C = 0 \\ -A - 3B + C = 0 \end{cases}$$

2. Construïm la matriu ampliada

Ordenem les incògnites com A, B, C :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Ara aplicarem el **mètode de Gauss** per convertir aquesta matriu en una matriu esglaonada.

3. Eliminem la A de les files 2 i 3

Fem:

$$F_2 \leftarrow F_2 + F_1$$

i

$$F_3 \leftarrow F_3 + F_1$$

Obtenim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 0 & 2 & -1 & 3000 \\ 0 & -2 & 2 & 3000 \end{array} \right]$$

4. Eliminem la B de la tercera fila

Tenim:

$$F_3 = (0, -2, 2 \mid 3000)$$

Podem fer:

$$F_3 \leftarrow F_3 + F_2$$

Així:

$$(0, -2, 2 \mid 3000) + (0, 2, -1 \mid 3000)$$

i obtenim:

$$(0, 0, 1 \mid 6000)$$

Per tant, la matriu queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3000 \\ 0 & 2 & -1 & 3000 \\ 0 & 0 & 1 & 6000 \end{array} \right]$$

Ja tenim una **matriu triangular** i podem començar la substitució cap enrere.

5. Calculem C

De l'última fila:

$$C = 6000$$

Per tant:

$$C = 6000$$

6. Calculem B

De la segona fila:

$$2B - C = 3000$$

Substituïm $C = 6000$:

$$2B - 6000 = 3000$$

$$2B = 9000$$

$$\boxed{B = 4500}$$

7. Calculem A

De la primera fila:

$$A + B + C = 3000$$

Substituïm $B = 4500$ i $C = 6000$:

$$A + 4500 + 6000 = 3000$$

$$A + 10500 = 3000$$

$$\boxed{A = -7500}$$

8. Solució

Per tant:

$$\boxed{A = -7500, \quad B = 4500, \quad C = 6000}$$

Interpretació

- Albert: -7500
- Ajuntament: 0
- Brauli: 4500
- Carles: 6000

Visualment:

$$\boxed{-7500 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \longrightarrow \quad 4500 \quad \longrightarrow \quad 6000}$$

9. Comprovació

Suma:

$$-7500 + 4500 + 6000 = 3000$$

Primera distància:

$$B - A = 4500 - (-7500) = 12000$$

i

$$2C = 2(6000) = 12000$$

Segona distància:

$$C - A = 6000 - (-7500) = 13500$$

i

$$3B = 3(4500) = 13500$$

Per tant, totes les condicions es compleixen.

Resultat final

$A = -7500, \quad B = 4500, \quad C = 6000$
