

Problema 1.B. Una empresa de joieria té dues màquines, A i B, amb les quals pot fer anells, polseres i collarets. L'empresa ha de decidir el nombre d'hores de treball de cadascuna de les màquines per a la setmana vinent. En cada hora de treball, la màquina A produeix 2 anells, 8 polseres i 4 collarets, mentre que la màquina B produeix 9 anells, 4 polseres i 10 collarets. Durant la setmana vinent l'empresa ha de produir almenys 80 anells, 96 polseres i 120 collarets. El cost per cada hora de treball de la màquina A és de 250 euros i el de la màquina B és de 600 euros.

a) Quantes hores ha de treballar cada màquina perquè el cost total de producció siga mínim?
(3 punts)

Problema 1.B

1. Definim les variables

Siga:

x = nombre d'hores que treballa la màquina A

y = nombre d'hores que treballa la màquina B

Com que no podem treballar un nombre negatiu d'hores:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

2. Plantegem les restriccions

Tenim tres productes: **anells, polseres i collarets.**

Anells

La màquina A produeix 2 anells/hora i la B produeix 9 anells/hora.

Com que hem de produir **almenys 80 anells:**

$$2x + 9y \geq 80$$

Polseres

La màquina A produeix 8 polseres/hora i la B produeix 4 polseres/hora.

Hem de produir **almenys 96 polseres**:

$$8x + 4y \geq 96$$

Podem simplificar dividint entre 4:

$$2x + y \geq 24$$

Collarets

La màquina A produeix 4 collarets/hora i la B produeix 10 collarets/hora.

Hem de produir **almenys 120 collarets**:

$$4x + 10y \geq 120$$

Simplifiquem dividint entre 2:

$$2x + 5y \geq 60$$

3. Funció objectiu

El cost d'una hora de la màquina A és de **250 €**.

El cost d'una hora de la màquina B és de **600 €**.

Per tant, el cost total és:

$$C(x, y) = 250x + 600y$$

Com que volem que el cost siga **mínim**:

$$\text{Minimitzar } C(x, y) = 250x + 600y$$

Per tant, tenim el problema:

$$\begin{cases} 2x + 9y \geq 80 \\ 2x + y \geq 24 \\ 2x + 5y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4. Busquem els vèrtexs de la regió factible

En un problema de programació lineal, el mínim es troba en **un dels vèrtexs de la regió factible**.

Les rectes que delimiten la regió són:

$$2x + 9y = 80$$

$$2x + y = 24$$

$$2x + 5y = 60$$

i els eixos.

Cal trobar els punts d'intersecció que siguin factibles.

Punt 1: intersecció amb l'eix y

Posem:

$$x = 0$$

La restricció més exigent ens dona:

$$2(0) + 5y \geq 60$$

$$y \geq 12$$

Però hem de comprovar també els anells:

$$9(12) = 108 \geq 80$$

i les polseres:

$$12 \geq 24$$

Aquesta última **no es compleix**.

Per tant, $x = 0$ necessita:

$$y \geq 24$$

Així tenim el vèrtex:

$$(0, 24)$$

Punt 2: intersecció de les restriccions d'anells i polseres

Resolem:

$$\begin{cases} 2x + 9y = 80 \\ 2x + y = 24 \end{cases}$$

Restem les dues equacions:

$$8y = 56$$

$$y = 7$$

Substituïm:

$$2x + 7 = 24$$

$$2x = 17$$

$$x = \frac{17}{2} = 8,5$$

Però comprovem els collarets:

$$2(8,5) + 5(7) = 17 + 35 = 52$$

I necessitem:

$$52 \geq 60$$

✗ No és factible.

Per tant, aquest punt no forma part de la regió factible.

5. Intersecció d'anells i collarets

Resolem:

$$\begin{cases} 2x + 9y = 80 \\ 2x + 5y = 60 \end{cases}$$

Restem:

$$4y = 20$$

$$y = 5$$

Substituïm:

$$2x + 5(5) = 60$$

$$2x + 25 = 60$$

$$2x = 35$$

$$x = 17,5$$

Per tant:

$$(17,5, 5)$$

Comprovem les polseres:

$$2(17,5) + 5 = 40$$

i necessitem:

$$40 \geq 24$$

✓ És factible.

6. Intersecció de polseres i collarets

Resolem:

$$\begin{cases} 2x + y = 24 \\ 2x + 5y = 60 \end{cases}$$

Restem:

$$4y = 36$$

$$y = 9$$

Substituïm:

$$2x + 9 = 24$$

$$2x = 15$$

$$x = 7,5$$

Per tant:

$$(7,5, 9)$$

Comprovem els anells:

$$2(7,5) + 9(9) = 15 + 81 = 96$$

i necessitem 80:

$$96 \geq 80$$

✓ És factible.

7. Intersecció amb l'eix x

Posem:

$$y = 0$$

Les restriccions són:

$$2x \geq 80$$

$$2x \geq 24$$

$$2x \geq 60$$

La més exigent és:

$$2x \geq 80$$

Per tant:

$$x \geq 40$$

El vèrtex és:

$(40, 0)$

8. Calculem el cost en cada vèrtex

La funció de cost és:

$$C(x, y) = 250x + 600y$$

Vèrtex	Cost
$(0, 24)$	$250(0) + 600(24) = 14.400\text{€}$
$(17, 5, 5)$	$250(17, 5) + 600(5) = 7.375\text{€}$
$(7, 5, 9)$	$250(7, 5) + 600(9) = 7.275\text{€}$
$(40, 0)$	$250(40) + 600(0) = 10.000\text{€}$

El cost més baix és:

7.275€

i correspon al punt:

$(7,5,9)$

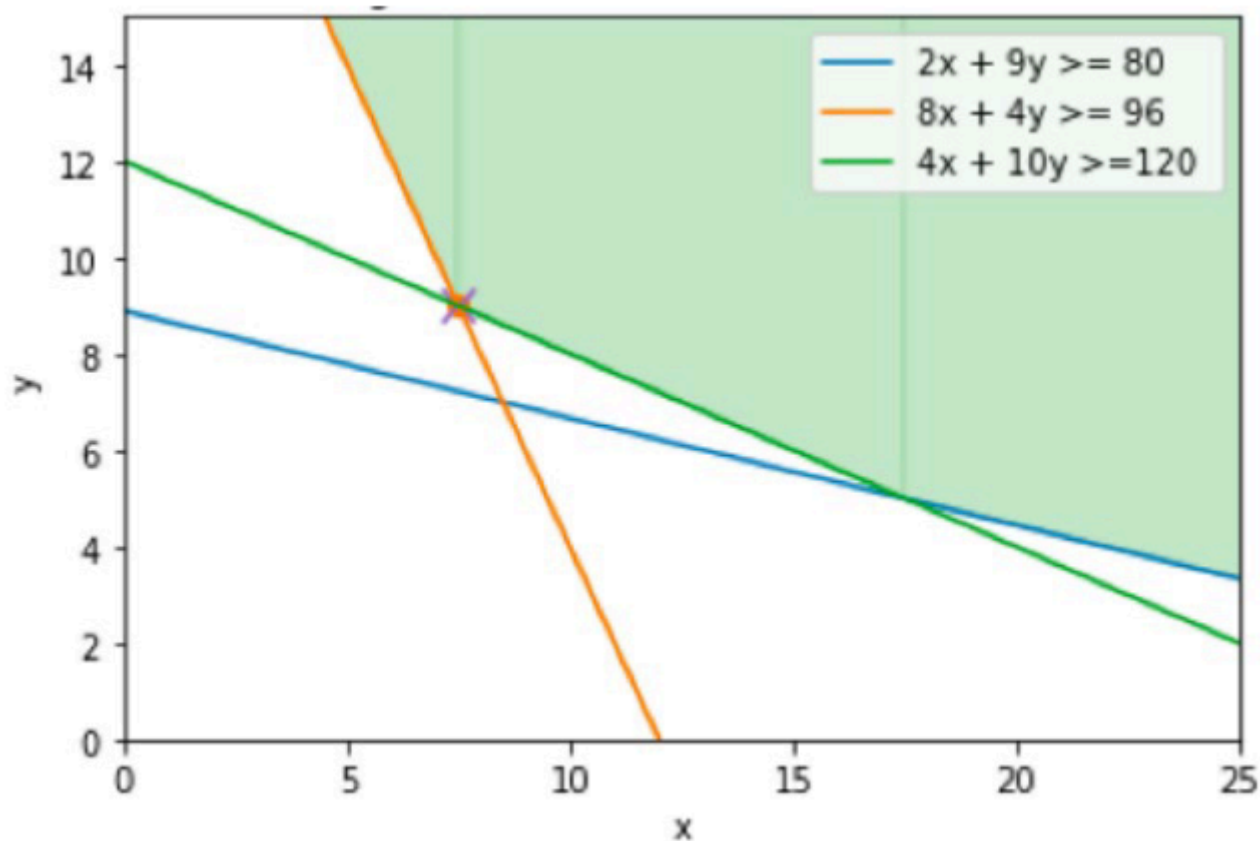
Per aconseguir el **cost mínim**, l'empresa ha de fer treballar:

$x = 7,5$ hores la màquina A

$y = 9$ hores la màquina B

És a dir:

La màquina A ha de treballar 7,5 hores i la màquina B ha de treballar 9 hores.



b) Quin és aquest cost mínim?

(0,5 punts)

El cost mínim és:

$$C(7, 5, 9) = 250(7, 5) + 600(9)$$

$$= 1875 + 5400$$

$$\boxed{C = 7275\text{€}}$$