

PREGUNTA 1: PROBABILITAT I ESTADÍSTICA (2.5 punts)

En un país s'ha detectat una malaltia X transmesa pel virus VirusX. Se sap que aquesta malaltia la pateix el 20% de la població. Per a detectar-la s'usa un test d'antígens que, entre persones malaltes dona positiu en el 90% dels casos i entre persones sanes dona positiu en el 5% dels casos.

Respon a tots els apartats

- 1.1 (0.75 punts)** Calcula la probabilitat que, en passar el test a una persona del país a l'atzar, el resultat siga positiu.

Dades de l'enunciat

Definim els esdeveniments:

- M : la persona té la malaltia.
- $\overline{M}$: la persona està sana.
- $+$: el test dona positiu.
- $-$: el test dona negatiu.

Les dades són:

$$P(M) = 0,20$$

$$P(\overline{M}) = 0,80$$

$$P(+|M) = 0,90$$

$$P(+|\overline{M}) = 0,05$$

1.1 Calcula la probabilitat que una persona triada a l'atzar done positiu. (0,75 punts)

Utilitzem el Teorema de la Probabilitat Total.

$$P(+) = P(+|M) \cdot P(M) + P(+|\overline{M}) \cdot P(\overline{M})$$

Substituïm les dades:

$$P(+) = 0,90 \cdot 0,20 + 0,05 \cdot 0,80$$

Calculem cada terme:

$$0,90 \cdot 0,20 = 0,18$$

$$0,05 \cdot 0,80 = 0,04$$

Sumem:

$$P(+) = 0,18 + 0,04 = 0,22$$

Resposta

$$P(+) = 0,22$$

La probabilitat que el test siga positiu és del 22%.

1.2 (0.75 punts) Calcula la probabilitat que una persona estiga sana sabent que ha donat positiu en el test.

1.2 Calcula la probabilitat que una persona estiga sana sabent que ha donat positiu. (0,75 punts)

Ara cal aplicar el **Teorema de Bayes**.

Volem calcular

$$P(\overline{M}|+)$$

La fórmula és

$$P(\overline{M}|+) = \frac{P(+|\overline{M})P(\overline{M})}{P(+)}$$

Ja sabem que

$$P(+) = 0,22$$

Substituïm:

$$P(\overline{M}|+) = \frac{0,05 \cdot 0,80}{0,22}$$

Calculem el numerador:

$$0,05 \cdot 0,80 = 0,04$$

Per tant,

$$P(\overline{M}|+) = \frac{0,04}{0,22} = 0,1818$$

Resposta

$$\boxed{P(\overline{M}|+) \approx 0,182}$$

o bé

$$\boxed{18,2\%}$$

Aproximadament el 18,2% de les persones que donen positiu estan sanes.

1.3 (1 punt) Si agafem 8 persones de la població a l'atzar, quina és la probabilitat que com a màxim dues d'aquestes tinguen la malaltia?

1.3 Si escollim 8 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que com a màxim dues tinguen la malaltia? (1 punt)

Cada persona:

- té la malaltia amb probabilitat

$$p = 0,20$$

- està sana amb probabilitat

$$q = 0,80$$

La variable

X = nombre de persones malaltes entre 8

segueix una **distribució binomial**

$$X \sim B(8, 0,20)$$

Ens demanen

$$P(X \leq 2)$$

És a dir,

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

1. Probabilitat de cap persona malalta

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{8}{0} (0,2)^0 (0,8)^8 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0,8^8 \\ &= 0,16777216 \end{aligned}$$

2. Probabilitat d'una persona malalta

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= \binom{8}{1} (0,2)^1 (0,8)^7 \\&= 8 \cdot 0,2 \cdot 0,8^7 \\&= 8 \cdot 0,2 \cdot 0,2097152 \\&= 0,33554432\end{aligned}$$

3. Probabilitat de dues persones malaltes

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} (0,2)^2 (0,8)^6$$

Com que

$$\binom{8}{2} = 28$$

tenim

$$\begin{aligned}P(X = 2) &= 28 \cdot 0,04 \cdot 0,262144 \\&= 0,29360128\end{aligned}$$

4. Sumem les tres probabilitats

$$\begin{aligned}P(X \leq 2) &= 0,16777216 + 0,33554432 + 0,29360128 \\&= 0,79691776\end{aligned}$$

Resposta

$$P(X \leq 2) \approx 0,797$$

o bé

$$79,7\%$$