

Problema 1. — En un estudi d'astronomia, es modelitza una constel·lació artificial formada per satèl·lits que orbiten al voltant de la Terra. Considerant el nostre sistema de coordenades amb origen en el centre de la Terra (on les unitats representen desenes de milers de quilòmetres), se situen 5 satèl·lits, A, B, C, D i E , amb coordenades

$$A(1,2,3), \quad B(3,2,1), \quad C(5,4,3), \quad D(2,1,1), \quad E(4,3,1).$$

Es diu que diferents satèl·lits formen un pla orbital si aquests, juntament amb el centre de la Terra, són coplanaris.

- (a) [1 punt] Determina si els satèl·lits A, B i C formen un pla orbital.

a) Determina si A, B, C formen un pla orbital

Per saber si O, A, B, C són coplanaris, podem calcular el determinant format pels vectors:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{OB} = (3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{OC} = (5, 4, 3)$$

Han de complir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Pas 1. Calculem el determinant

Desenvolupem per la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Calculem els determinants 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 9 - 5 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2$$

Per tant:

$$\det = 1(2) - 2(4) + 3(2)$$

$$= 2 - 8 + 6$$

$$\boxed{\det = 0}$$

Pas 2. Interpretem el resultat

Com que:

$$\boxed{\det = 0}$$

els vectors $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ són linealment dependents.

Això significa que els quatre punts:

$$O, A, B, C$$

són coplanaris.

Per tant, **sí que formen un pla orbital.**

☒ Resposta a l'apartat a)

$\boxed{\text{Sí, } A, B, C \text{ formen un pla orbital.}}$

- (b) [1 punt] Proporciona un punt F (diferent de l'origen) on es podria col·locar un sisè satèl·lit per assegurar que els satèl·lits D , E i F formen un altre pla orbital.

b) Troba un punt F perquè D , E , F formen un altre pla orbital

Ara volem trobar un punt $F \neq O$ tal que:

$$O, D, E, F$$

siguen coplanaris.

Tenim:

$$D = (2, 1, 1)$$

$$E = (4, 3, 1)$$

Una manera senzilla és buscar un vector que siga **combinació lineal** dels vectors $\overrightarrow{OD}$ i $\overrightarrow{OE}$.

Per exemple, podem prendre:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

Pas 1. Sumem els vectors

$$\overrightarrow{OD} = (2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{OE} = (4, 3, 1)$$

Per tant:

$$\overrightarrow{OF} = (2, 1, 1) + (4, 3, 1)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OF} = (6, 4, 2)}$$

Així podem escollir:

$$\boxed{F = (6, 4, 2)}$$

Pas 2. Comprovem que és correcte

Observem que:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

Per tant, OF és una combinació lineal de OD i OE .

Això garanteix que els tres vectors:

$$\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OE}, \quad \overrightarrow{OF}$$

estan en el mateix pla.

També podem comprovar-ho amb un determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

perquè la tercera fila és la suma de les dues primeres:

$$(6, 4, 2) = (2, 1, 1) + (4, 3, 1)$$

Per tant, són coplanaris.