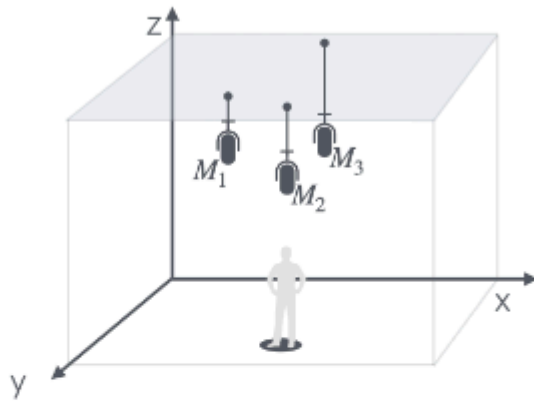


Problema 1. — En un estudi de gravació s'han col·locat tres micròfons penjats del sostre amb cables de diferents longituds per enregistrar un concert acústic.



Considerant un sistema de referència en què l'origen es troba al terra de la sala, el sostre de l'estudi es troba a una altura de 7m tal com es mostra representat en la figura.

Els micròfons es col·loquen en les posicions següents:

- Micròfon 1 (M_1): coordenades $x = 2$, $y = 3$, penjant del sostre amb un cable de longitud 1m.
- Micròfon 2 (M_2): coordenades $x = 4$, $y = 4$, penjant del sostre amb un cable de longitud 2m.
- Micròfon 3 (M_3): coordenades $x = 5$, $y = 1$, penjant del sostre amb un cable de longitud 3m.

Durant l'assaig, un músic es col·loca en el punt $P(4,3,0)$, que representa la seva posició sobre l'escenari.

(a) [1 punt] Determina les coordenades dels tres micròfons i calcula l'equació del pla que els conté.

(a) Coordenades dels tres micròfons i equació del pla

1. Coordenades dels micròfons

Micròfon M_1

Ens diuen:

- $x = 2$
- $y = 3$
- cable de longitud 1 m

Com que el sostre està a $z = 7$:

$$z = 7 - 1 = 6$$

Per tant:

$$M_1 = (2, 3, 6)$$

Micròfon M_2

Ens diuen:

- $x = 4$
- $y = 4$
- cable de longitud 2 m

Per tant:

$$z = 7 - 2 = 5$$

Així:

$$M_2 = (4, 4, 5)$$

Micròfon M_3

Ens diuen:

- $x = 5$
- $y = 1$
- cable de longitud 3 m

Per tant:

$$z = 7 - 3 = 4$$

Així:

$$M_3 = (5, 1, 4)$$

2. Calculem dos vectors del pla

Utilitzem M_1 com a punt de referència.

Calculem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= M_2 - M_1 \\ &= (4 - 2, 4 - 3, 5 - 6)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = (2, 1, -1)}$$

Ara:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_3} &= M_3 - M_1 \\ &= (5 - 2, 1 - 3, 4 - 6)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_3} = (3, -2, -2)}$$

3. Calculem un vector normal al pla

Fem el producte vectorial:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

És a dir:

$$\vec{n} = (2, 1, -1) \times (3, -2, -2)$$

Calculant el producte vectorial obtenim:

$$\boxed{\vec{n} = (-4, 1, -7)}$$

També podríem utilitzar el vector oposat:

$$(4, -1, 7)$$

que ens donarà la mateixa equació del pla multiplicada per -1 .

4. Equació del pla

L'equació d'un pla és:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Utilitzem:

$$\vec{n} = (-4, 1, -7)$$

i el punt:

$$M_1 = (2, 3, 6)$$

Per tant:

$$-4(x - 2) + (y - 3) - 7(z - 6) = 0$$

Desenvolupem:

$$-4x + 8 + y - 3 - 7z + 42 = 0$$

$$-4x + y - 7z + 47 = 0$$

Per tant, una possible equació del pla és:

$$\pi : -4x + y - 7z + 47 = 0$$

Equivalentment, multiplicant per -1 :

$$\pi : 4x - y + 7z - 47 = 0$$

- (b) [1 punt] Sigui π el pla que conté els micròfons M_1 , M_2 , i M_3 . Per tal de millorar la qualitat del so, es vol col·locar un quart micròfon M_4 de manera que sigui la projecció ortogonal del punt P sobre el pla π . Determina les coordenades d'aquest quart micròfon.

(b) Quart micròfon M_4

Ara tenim el punt on es troba el músic:

$$P = (4, 3, 0)$$

Volem col·locar el quart micròfon M_4 de manera que sigui la projecció ortogonal de P sobre el pla π .

Això significa que el segment PM_4 ha de ser perpendicular al pla.

1. Vector normal al pla

Hem calculat abans un vector normal:

$$\vec{n} = (4, -1, 7)$$

Per tant, la recta perpendicular al pla que passa per P té com a vector director:

$$\vec{n} = (4, -1, 7)$$

La recta és:

$$(x, y, z) = (4, 3, 0) + t(4, -1, 7)$$

En forma paramètrica:

$$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 3 - t \\ z = 7t \end{cases}$$

2. Busquem el punt d'intersecció amb el pla

El punt M_4 ha d'estar al pla:

$$4x - y + 7z - 47 = 0$$

Substituïm les expressions de la recta:

$$4(4 + 4t) - (3 - t) + 7(7t) - 47 = 0$$

Desenvolupem:

$$16 + 16t - 3 + t + 49t - 47 = 0$$

Agrupem:

$$66t - 34 = 0$$

Per tant:

$$66t = 34$$

$$t = \frac{34}{66}$$

Simplifiquem:

$$t = \frac{17}{33}$$

3. Calculem les coordenades de M_4

Substituïm:

$$t = \frac{17}{33}$$

a la recta:

Coordenada x

$$x = 4 + 4 \left(\frac{17}{33} \right)$$

$$x = 4 + \frac{68}{33}$$

$$x = \frac{132 + 68}{33}$$

$$x = \frac{200}{33}$$

Coordenada y

$$y = 3 - \frac{17}{33}$$

$$y = \frac{99 - 17}{33}$$

$$y = \frac{82}{33}$$

Coordenada z

$$z = 7 \left(\frac{17}{33} \right)$$

$$z = \frac{119}{33}$$

Per tant:

$$M_4 = \left(\frac{200}{33}, \frac{82}{33}, \frac{119}{33} \right)$$

En forma decimal:

$$M_4 \approx (6,06, 2,48, 3,61)$$