

2.1 Mitjançant un procés de barreja continu en tres tancs interconnectats, una planta química produeix tres compostos, X, Y, Z, lligats a uns valors reals x , y , z , respectivament, anomenats pseudodensitats. Les pseudodensitats en els tancs han d'estar en equilibri per a mantenir-hi la concentració desitjada dels productes. Els enginyers del procés han establert les condicions d'equilibri següents:

- **Tanc 1.** La suma de la pseudodensitat x més el triple de la pseudodensitat y més la pseudodensitat z ha de valdre 5.
- **Tanc 2.** La suma de α vegades la pseudodensitat x més el doble de la pseudodensitat z s'ha d'anul·lar, on α és el factor catalitzador.
- **Tanc 3.** La pseudodensitat z ha de ser α vegades la pseudodensitat y .

2.1.1 (1.25 punts) Estudia l'existència i el nombre de solucions x, y, z (les possibles configuracions d'equilibri) en funció dels valors del factor catalitzador α .

2.1.1. Estudi de l'existència i nombre de solucions

Les tres condicions d'equilibri són:

Tanc 1

$$x + 3y + z = 5$$

Tanc 2

$$\alpha x + 2z = 0$$

Tanc 3

$$z = \alpha y$$

Portem la tercera equació a la forma habitual:

$$z - \alpha y = 0$$

Per tant, el sistema és:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + 2z = 0 \\ -\alpha y + z = 0 \end{cases}$$

1. Matriu ampliada

Ordenem les incògnites com x, y, z :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Ara estudiem què passa segons el valor de α .

2. Utilitzem la tercera equació

De:

$$z = \alpha y$$

podem substituir directament z en les altres dues equacions.

En la primera:

$$x + 3y + \alpha y = 5$$

$$x + (3 + \alpha)y = 5$$

En la segona:

$$\alpha x + 2\alpha y = 0$$

Traiem factor comú:

$$\alpha(x + 2y) = 0$$

Ara tenim:

$$\begin{cases} x + (3 + \alpha)y = 5 \\ \alpha(x + 2y) = 0 \end{cases}$$

És aquí on apareixen els casos importants.

CAS 1: $\alpha = 0$

Si:

$$\alpha = 0$$

la segona equació queda:

$$0 = 0$$

Per tant, no ens aporta cap informació.

La primera equació queda:

$$x + 3y = 5$$

i de la tercera:

$$z = 0$$

Per tant:

$$x = 5 - 3y$$

Podem donar qualsevol valor a y .

Si posem:

$$y = t$$

aleshores:

$$x = 5 - 3t, \quad y = t, \quad z = 0$$

amb $t \in \mathbb{R}$.

Per tant, hi ha:

infinites solucions

CAS 2: $\alpha \neq 0$

Si $\alpha \neq 0$, de:

$$\alpha(x + 2y) = 0$$

podem dividir per α :

$$x + 2y = 0$$

Per tant:

$$x = -2y$$

Substituïm aquesta expressió en:

$$x + (3 + \alpha)y = 5$$

Obtenim:

$$-2y + (3 + \alpha)y = 5$$

Agrupem:

$$(1 + \alpha)y = 5$$

Ara apareix un altre cas especial.

CAS 2.1: $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq -1$

Podem dividir per $1 + \alpha$:

$$y = \frac{5}{1 + \alpha}$$

Per tant:

$$y = \frac{5}{\alpha + 1}$$

Com que:

$$x = -2y$$

tenim:

$$x = -\frac{10}{\alpha + 1}$$

I com que:

$$z = \alpha y$$

obtenim:

$$z = \frac{5\alpha}{\alpha + 1}$$

Per tant, per a:

$$\alpha \neq 0, -1$$

hi ha una única solució:

$$\left(-\frac{10}{\alpha + 1}, \frac{5}{\alpha + 1}, \frac{5\alpha}{\alpha + 1} \right)$$

CAS 2.2: $\alpha = -1$

Ara tenim:

$$(1 + \alpha)y = 5$$

Si $\alpha = -1$:

$$0 \cdot y = 5$$

és a dir:

$$0 = 5$$

Això és una **contradicció**.

Per tant:

No hi ha cap solució

3. Resum de l'estudi

Podem resumir-ho en una taula:

Valor de α	Nombre de solucions
$\alpha = -1$	Cap solució
$\alpha = 0$	Infinites solucions
$\alpha \neq 0, -1$	Una única solució

Per tant:

$\begin{cases} \alpha = -1 & \rightarrow 0 \text{ solucions} \\ \alpha = 0 & \rightarrow \infty \text{ solucions} \\ \alpha \neq 0, -1 & \rightarrow 1 \text{ solució} \end{cases}$

2.1.2 (1.25 punts) Quan el factor catalitzador satisfà $\alpha \neq -1$, el procés assoleix estats d'equilibri factibles. En aquest cas, calcula, si existeixen, els valors x, y, z , en funció del valor α .

2.1.2. Quan $\alpha \neq -1$

L'enunciat ens diu que:

$$\alpha \neq -1$$

Per tant, descartem el cas que no tenia solució.

Ens queden dos casos.

Cas A: $\alpha = 0$

Com hem vist abans:

$$z = 0$$

i:

$$x + 3y = 5$$

Per tant:

$$(x, y, z) = (5 - 3t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Hi ha infinites configuracions d'equilibri.

Cas B: $\alpha \neq 0, -1$

Tenim:

$$y = \frac{5}{\alpha + 1}$$

$$x = -\frac{10}{\alpha + 1}$$

$$z = \frac{5\alpha}{\alpha + 1}$$

Per tant:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{10}{\alpha + 1}, \frac{5}{\alpha + 1}, \frac{5\alpha}{\alpha + 1} \right)$$

i aquesta configuració és **única**.