

2.1 L'estat tensional en un punt d'un sòlid elàstic es defineix a partir d'una matriu quadrada T d'ordre 3. El vector tensió en la direcció de $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ve donat per $u = Tv$. Per a

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

2.1.1 (1 punt) Discuteix el sistema d'equacions lineals $Tv = u$ en funció del paràmetre real m .

2.1.1 Discuteix el sistema $Tv = u$ en funció del paràmetre m . (1 punt)

Per estudiar el sistema calculem el determinant de la matriu.

Com que la tercera fila és independent,

$$\begin{aligned} \det(T) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 - m^2. \end{aligned}$$

Cas 1. $m \neq \pm 2$

Aleshores

$$\det(T) \neq 0.$$

La matriu és invertible.

Conclusió

El sistema és **compatible determinat (SCD)**, és a dir, té una única solució.

Cas 2. $m = 2$

El sistema queda

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Les dues primeres equacions coincideixen.

Només queda

$$x + y = 2.$$

Hi ha infinites solucions.

Conclusió

El sistema és **compatible indeterminat (SCI)**.

Cas 3. $m = -2$

El sistema és

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ -2x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

La primera equació és

$$x - y = 2.$$

La segona és

$$x - y = -2.$$

Són incompatibles.

Conclusió

El sistema és **incompatible (SI)**.

2.1.2 (0.75 punts) Resol el sistema $Tv = u$ per a $m = -1$.

2.1.2 Resol el sistema per a $m = -1$. (0,75 punts)

Substituïm $m = -1$:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

Pas 1. Eliminem una incògnita

Multipliquem la segona equació per 2:

$$-2x + 4y = 8.$$

La sumem amb la primera:

$$(2x - y) + (-2x + 4y) = 4 + 8.$$

$$3y = 12.$$

$$y = 4.$$

Pas 2. Calculem x

Substituïm a

$$2x - y = 4.$$

$$2x - 4 = 4.$$

$$2x = 8.$$

$$x = 4.$$

Pas 3. Calculem z

Directament,

$$z = -2.$$

Solució

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.1.3 (0.75 punts) S'anomenen tensions principals de T els valors reals α tals que $\det(T - \alpha I) = 0$, sent I la matriu identitat. Calcula les tensions principals per a $m = 2$.

2.1.3 Calcula les tensions principals per a $m = 2$. (0,75 punts)

Les tensions principals són els valors propis de la matriu.

Per a $m = 2$,

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculem

$$\det(T - \alpha I) = 0.$$

Tenim

$$T - \alpha I = \begin{pmatrix} 2 - \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

El determinant és

$$(1 - \alpha) \begin{vmatrix} 2 - \alpha & 2 \\ 2 & 2 - \alpha \end{vmatrix}.$$

Calculem el menor:

$$(2 - \alpha)^2 - 4 = \alpha^2 - 4\alpha.$$

Factoritzem:

$$\alpha(\alpha - 4).$$

Per tant,

$$\det(T - \alpha I) = (1 - \alpha)\alpha(\alpha - 4).$$

Igualant a zero,

$$(1 - \alpha)\alpha(\alpha - 4) = 0.$$

Les solucions són

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \alpha = 4.$$