

2.2 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

2.2.1 (1 punt) Resol el sistema d'equacions $Ax = Bx + b$.

2.2.1. Resoldre el sistema $Ax = Bx + b$

Volem trobar el vector:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

que compleix:

$$Ax = Bx + b$$

1. Calculem Ax

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

2. Calculem $Bx + b$

Primer:

$$Bx = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

Ara sumem b :

$$Bx + b = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 + 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 + 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

Iguallem component a component:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5x_1 - 2x_2 + 1 \\ x_1 + x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Simplifiquem.

Primera equació:

$$-3x_1 + x_2 = 1$$

Segona:

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

Tenim:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

De la segona:

$$x_1 = -2x_2$$

Substituïm en la primera:

$$-3(-2x_2) + x_2 = 1$$

$$6x_2 + x_2 = 1$$

$$7x_2 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{7}$$

I:

$$x_1 = -2\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$x_1 = -\frac{2}{7}$$

Resultat

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

2.2.2 (0.75 punts) Troba el valor de $\det(A^5(2B)^{-1})$.

2.2.2. Calcular $\det(A^5(2B)^{-1})$

Ací podem utilitzar les propietats dels determinants.

Recordem:

$$\det(MN) = \det(M) \det(N)$$

i:

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

Per tant:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \det(A^5) \det((2B)^{-1})$$

A més:

$$\det(A^5) = (\det A)^5$$

i:

$$\det((2B)^{-1}) = \frac{1}{\det(2B)}$$

Calculem $\det(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per a una matriu 2×2 :

$$\det(A) = ad - bc$$

Per tant:

$$\det(A) = 2(1) - (-1)(1)$$

$$\boxed{\det(A) = 3}$$

Calculem $\det(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 5(3) - (-2)(2)$$

$$= 15 + 4$$

$$\boxed{\det(B) = 19}$$

Ara necessitem $\det(2B)$.

Com que és una matriu 2×2 :

$$\det(2B) = 2^2 \det(B)$$

$$= 4 \cdot 19$$

$$\boxed{\det(2B) = 76}$$

Per tant:

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \frac{3^5}{76}$$

$$\boxed{\det(A^5(2B)^{-1}) = \frac{243}{76}}$$

2.2.3 (0.75 punts) Calcula els valors de α i β , si n'hi ha, que satisfan $\alpha A + \beta B = I$, sent I la matriu identitat.

2.2.3. Trobar α i β si existeixen

Ens demanen:

$$\alpha A + \beta B = I$$

on:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem primer:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

i:

$$\beta B = \begin{pmatrix} 5\beta & -2\beta \\ 2\beta & 3\beta \end{pmatrix}$$

Sumem:

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix}$$

Això ha de ser igual a I :

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iguallem els elements:

$$\begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 1 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

Les dues equacions centrals són la mateixa.

De:

$$-\alpha - 2\beta = 0$$

obtenim:

$$\alpha = -2\beta$$

Substituïm en la primera:

$$2(-2\beta) + 5\beta = 1$$

$$-4\beta + 5\beta = 1$$

$$\beta = 1$$

Per tant:

$$\alpha = -2$$

Comprovem amb l'última:

$$\alpha + 3\beta = -2 + 3 = 1$$

✓ Correcte.

Resultat

$$\boxed{\alpha = -2, \quad \beta = 1}$$

De fet, podem comprovar directament que:

$$-2A + B = I$$

perquè:

$$-2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$