

2.2 Les matrius quadrades que verifiquen que la seua inversa és igual a la seua transposada es diuen matrius ortogonals.

2.2.1 (0.75 punts) Comprova que la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és una matriu ortogonal i calcula A^{38} i $(AA^T)^{39}$, on A^T és la matriu transposada de A .

Tenim la matriu

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordem que una matriu és **ortogonal** si:

$$A^{-1} = A^T$$

Equivalentment:

$$A \cdot A^T = I$$

2.2.1. Comprova que A és ortogonal i calcula A^{38} i $(AA^T)^{39}$

Pas 1. Calculem la transposada

La matriu és:

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, la transposada és:

$$A^T =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 2. Comprovem que és ortogonal

Calculem $A \cdot A^T$:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multipliquem:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Per tant:

$$A \cdot A^T = I$$

i això implica que:

$$A^{-1} = A^T$$

Per tant:

 **A és una matriu ortogonal.**

Pas 3. Calculem A^{38}

En lloc de multiplicar 38 vegades, busquem el **període** de la matriu.

Calculem A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara multipliquem per A :

$$A^3 = A^2 A$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$A^3 = I$$

Això és molt útil.

Com que:

$$38 = 3 \cdot 12 + 2$$

tenim:

$$A^{38} = A^{3 \cdot 12 + 2}$$

$$A^{38} = (A^3)^{12} A^2$$

Com que $A^3 = I$:

$$A^{38} = I^{12} A^2 = A^2$$

Per tant:

$$A^{38} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 4. Calculem $(AA^T)^{39}$

Ja hem comprovat que:

$$AA^T = I$$

Per tant:

$$(AA^T)^{39} = I^{39}$$

i sabem que:

$$I^n = I$$

Per tant:

$$(AA^T)^{39} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ Resultat 2.2.1

$$A^{38} = A^2$$

i

$$(AA^T)^{39} = I$$

2.2.2 (0.5 punts) Pot ser el determinant d'una matriu ortogonal igual a zero? Justifica la resposta.

2.2.2. Pot ser el determinant d'una matriu ortogonal igual a zero?

La resposta és:

✗ No.

Justificació:

Si A és ortogonal:

$$A^{-1} = A^T$$

Perquè existisca A^{-1} , la matriu ha de ser **invertible**.

Una matriu és invertible si i només si:

$$\det(A) \neq 0$$

Per tant, una matriu ortogonal **no pot tindre determinant zero**.

De fet, podem obtenir encara més informació.

Com que:

$$AA^T = I$$

prenem determinants:

$$\det(AA^T) = \det(I)$$

$$\det(A) \cdot \det(A^T) = 1$$

I com que:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

tenim:

$$\det(A)^2 = 1$$

Per tant:

$$\boxed{\det(A) = \pm 1}$$

 Resposta

No pot ser zero. El determinant d'una matriu ortogonal sempre és 1 o -1.

2.2.3 (0.5 punts) Si A i B són dues matrius ortogonals de la mateixa dimensió, analitza si $A \cdot B$ és també una matriu ortogonal.

2.2.3. Si A i B són matrius ortogonals de la mateixa dimensió, $A \cdot B$ també és ortogonal?

Sí.

Hem de demostrar que **$A \cdot B$ és ortogonal**.

Com que A i B són ortogonals:

$$A^{-1} = A^T$$

i

$$B^{-1} = B^T$$

Considerem la matriu:

$$C = A \cdot B$$

La seua transposada és:

$$C^T = (AB)^T$$

Recordem la propietat:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Per tant:

$$C^T = B^T A^T$$

Ara calculem la inversa:

$$C^{-1} = (AB)^{-1}$$

i sabem que:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Com que A i B són ortogonals:

$$C^{-1} = B^T A^T$$

Per tant:

$$\boxed{C^{-1} = C^T}$$

Això demostra que $C = AB$ és ortogonal.

Resposta

Sí. El producte de dues matrius ortogonals de la mateixa dimensió és també una matriu ortogonal.

2.2.4 (0.75 punts) Troba la matriu X que verifiqui $A^2X - 2B = 0$, sent

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.2.4. Troba la matriu X que verifica $A^2X - 2B = 0$

Tenim:

$$A^2X - 2B = 0$$

i

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Primer reorganitzem l'equació:

$$A^2X = 2B$$

Com que A és ortogonal, podem aprofitar que:

$$A^{-1} = A^T$$

I, a més, hem vist que:

$$A^3 = I$$

Per tant:

$$(A^2)^{-1} = A$$

Multipliquem l'equació per A per l'esquerra:

$$A(A^2X) = A(2B)$$

$$A^3X = 2AB$$

Com que $A^3 = I$:

$$X = 2AB$$

Pas 1. Calculem A·B

Tenim:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Multipliquem:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Primera fila:

$$(0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

i:

$$(0, 0, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4$$

Segona fila:

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

i:

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 3$$

Tercera fila:

$$(0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2$$

i:

$$(0, 1, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Per tant:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 2. Multipliquem per 2

Com que:

$$X = 2AB$$

tenim:

$$X = 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$