

2.2 Diem que una matriu quadrada és ortogonal quan la matriu inversa coincideix amb la matriu transposada.

2.2.1 (0.75 punts) Comprova que per a tot valor real α la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

és ortogonal.

2.2.1 Comprova que la matriu és ortogonal. (0,75 punts)

Es dona

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Una matriu és **ortogonal** si

$$A^{-1} = A^T,$$

o, equivalentment,

$$A^T A = I.$$

Pas 1. Calculem la transposada

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Pas 2. Multipliquem $A^T A$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Calculem cada element.

Primera fila, primera columna

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Primera fila, segona columna

$$\cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Segona fila, primera columna

$$\sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

Segona fila, segona columna

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Per tant,

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Conclusió

Com que

$$A^T A = I,$$

es compleix que

$$A^{-1} = A^T.$$

Per tant,

La matriu A és ortogonal per a qualsevol valor real d α .

2.2.2 (0.75 punts) Determina els valors de a i b perquè la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sigui ortogonal. Quantes matrius ortogonals d'aquesta forma hi ha?

2.2.2 Determina els valors de a i b . (0,75 punts)

Es dona

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perquè sigui ortogonal ha de complir

$$B^T B = I.$$

Pas 1. Calculem la transposada

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pas 2. Multipliquem

$$B^T B = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Perquè sigui la identitat,

$$\begin{cases} b^2 = 1 \\ a^2 = 1 \end{cases}$$

Per tant,

$$a = \pm 1, \quad b = \pm 1.$$

Nombre de matrius

Hi ha dues possibilitats per a a i dues per a b .

Per tant,

$$2 \cdot 2 = 4.$$

Resposta

$$a = \pm 1, \quad b = \pm 1$$

i existeixen

$$4$$

matrius ortogonals d'aquesta forma.

2.2.3 (1 punt) Resol l'equació matricial amb incògnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on B és una matriu ortogonal com la de l'apartat anterior.

2.2.3 Resol l'equació matricial. (1 punt)

Es dona

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pas 1. Aïllem BX

Restem les dues matrius:

$$BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pas 2. Multipliquem per B^{-1}

Com que B és ortogonal,

$$B^{-1} = B^T.$$

Així,

$$X = B^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com que

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenim

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Resposta general

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}, \quad a, b = \pm 1.$$

Si es desenvolupen les quatre possibilitats:

- Si $a = 1$, $b = 1$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $a = 1$, $b = -1$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $a = -1$, $b = 1$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Si $a = -1$, $b = -1$,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$