

Problema 2.A. Després d'un abocament químic accidental en un estany, la concentració en parts per milió (ppm) de tòxic evoluciona durant les primeres 15 hores segons la funció següent, en què t representa el temps en hores:

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + a & 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{12t + 89}{t + 1} & 6 < t \leq 15 \end{cases}$$

- a) Trobeu el valor de a sabent que $C(t)$ és una funció contínua en l'interval $[0,15]$.
(0,5 punts)

a) Trobar el valor de a perquè $C(t)$ siga contínua

L'únic punt on hem de comprovar la continuïtat és en:

$$t = 6$$

Perquè la funció siga contínua, els dos trossos han de donar el mateix valor en $t = 6$.

Primer tros

$$C(6) = -6^2 + 8(6) + a$$

$$C(6) = -36 + 48 + a$$

$$C(6) = 12 + a$$

Segon tros

Calculem el límit quan $t \rightarrow 6^+$:

$$\begin{aligned} & \frac{12(6) + 89}{6 + 1} \\ &= \frac{72 + 89}{7} \\ &= \frac{161}{7} \\ &= 23 \end{aligned}$$

Per tant, per continuïtat:

$$12 + a = 23$$

$$\boxed{a = 11}$$

A partir d'ara, la funció és:

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 11 & 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{12t + 89}{t + 1} & 6 < t \leq 15 \end{cases}$$

- b) Trobeu l'instant en el qual la concentració és màxima en l'interval de temps $[0,6]$ i determineu si el valor obtingut és el màxim absolut durant les 15 hores. (1 punt)

b) Instant en què la concentració és màxima en $[0, 6]$

En aquest interval tenim:

$$C(t) = -t^2 + 8t + 11$$

És una **paràbola** amb:

$$a = -1, \quad b = 8$$

Com que el coeficient de t^2 és negatiu, la paràbola està oberta cap avall i, per tant, el seu vèrtex és un **màxim**.

La coordenada t del vèrtex és:

$$t_v = \frac{-b}{2a}$$

Substituïm:

$$t_v = \frac{-8}{2(-1)}$$

$$\boxed{t_v = 4}$$

Per tant, la concentració màxima en $[0, 6]$ es produeix a les **4 hores**.

Calculem el valor:

$$C(4) = -4^2 + 8(4) + 11$$

$$= -16 + 32 + 11$$

$$\boxed{C(4) = 27}$$

Per tant:

$$\boxed{\text{Màxim en } [0, 6] : \quad 27 \text{ ppm a les 4 hores}}$$

És el màxim absolut dels primers 15 hores?

Hem d'estudiar també el segon tram:

$$C(t) = \frac{12t + 89}{t + 1}$$

Calculem la derivada:

$$C'(t) = \frac{12(t + 1) - (12t + 89)}{(t + 1)^2}$$

Simplifiquem:

$$C'(t) = \frac{12t + 12 - 12t - 89}{(t + 1)^2}$$

$$C'(t) = \frac{-77}{(t + 1)^2}$$

Com que:

$$(t + 1)^2 > 0$$

tenim:

$$C'(t) < 0$$

Per tant, en el segon tram la funció és **decreixent**.

En particular, comença a $t = 6$ amb:

$$C(6) = 23$$

i després va disminuint.

Com que:

$$27 > 23$$

el valor **27** és també el **màxim absolut** durant les 15 hores.

$$t = 4 \text{ hores}$$

i la concentració màxima és:

$$27 \text{ ppm}$$

Sí, és el **màxim absolut** en $[0, 15]$.

- c) Justifiqueu si la concentració s'ha anat reduint en tot moment al tram $]6,15]$.
(0,5 punts)

c) Justificar si la concentració s'ha anat reduint en tot moment en el tram $]6, 15]$

En aquest tram tenim:

$$C(t) = \frac{12t + 89}{t + 1}$$

Cal estudiar el signe de la derivada:

$$C'(t) = \frac{-77}{(t + 1)^2}$$

Com que per a $6 < t \leq 15$:

$$(t + 1)^2 > 0$$

i:

$$-77 < 0$$

tenim:

$$C'(t) < 0$$

per a tot $t \in]6, 15]$.

Per tant, la funció és **estrictaament decreixent** en aquest interval.

Sí, la concentració s'ha anat reduint en tot moment en $]6, 15]$.

- d) S'ha d'emetre una alerta sempre que la concentració supere les 20 ppm.
Determineu tots els intervals de temps en els quals l'alerta ha d'estar activada.
(1,5 punts)

d) Quan s'ha d'activar l'alarma?

L'alarma s'activa quan:

$$C(t) > 20$$

Hem de resoldre aquesta desigualtat en **els dos trams**.

Primer tram: $0 \leq t \leq 6$

Tenim:

$$-t^2 + 8t + 11 > 20$$

Passem el 20 a l'esquerra:

$$-t^2 + 8t - 9 > 0$$

Multipliquem per -1 , recordant que **canvia el sentit de la desigualtat**:

$$t^2 - 8t + 9 < 0$$

Ara resolem l'equació associada:

$$t^2 - 8t + 9 = 0$$

Utilitzem la fórmula quadràtica:

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(9)}}{2}$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2}$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

Com que:

$$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

tenim:

$$t = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$\boxed{t = 4 \pm \sqrt{7}}$$

Com que la paràbola $t^2 - 8t + 9$ és negativa **entre les dues arrels**:

$$4 - \sqrt{7} < t < 4 + \sqrt{7}$$

I aquest interval ja està dins de $[0, 6]$, perquè:

$$4 + \sqrt{7} \approx 6,646$$

Per tant, en el primer tram:

$$\boxed{t \in (4 - \sqrt{7}, 6]}$$

Recordem que a $t = 6$:

$$C(6) = 23 > 20$$

Segon tram: $6 < t \leq 15$

Ara tenim:

$$\frac{12t + 89}{t + 1} > 20$$

Com que $t > 6$, tenim $t + 1 > 0$, així que podem multiplicar sense canviar el signe:

$$12t + 89 > 20(t + 1)$$

$$12t + 89 > 20t + 20$$

$$69 > 8t$$

$$t < \frac{69}{8}$$

Per tant, en aquest segon tram:

$$6 < t < \frac{69}{8}$$

7. Unim els dos intervals

Del primer tram:

$$(4 - \sqrt{7}, 6]$$

Del segon:

$$(6, \frac{69}{8})$$

El punt $t = 6$ queda inclòs pel primer tram i, per tant, podem unir els dos intervals:

$$\left(4 - \sqrt{7}, \frac{69}{8}\right)$$

Aproximadament:

$$4 - \sqrt{7} \approx 1,354$$

i:

$$\frac{69}{8} = 8,625$$

Per tant:

$$t \in (1,354, 8,625)$$