

Problema 2.A. En una carretera se sanciona els vehicles amb velocitat superior a 110 km/h o inferior a 80 km/h. Si el radar detecta un vehicle amb velocitat inferior a 80 km/h, el conductor ha de pagar 100 euros, siga quina siga la seua velocitat; si la velocitat detectada és superior a 110 km/h, el conductor ha de pagar 50 euros més la diferència entre la velocitat detectada pel radar i 110 km/h, en euros; si la velocitat detectada està entre 80 i 110 km/h, tots dos inclosos, no ha de pagar res.

- a) Obteniu la funció que indique els euros que ha de pagar un conductor si el radar detecta que el seu cotxe circula a x km/h, per a qualsevol $x \geq 0$, i analitzeu en quins punts aquesta funció és contínua i en quins punts és discontinua. (1,25 punts)

2.A.1. Funció de la multa i continuïtat

Siga $f(x)$ la quantitat d'euros que ha de pagar un conductor quan el radar detecta una velocitat $x \geq 0$.

L'enunciat ens dona tres situacions:

- Si $x < 80$, paga 100 €.
- Si $80 \leq x \leq 110$, paga 0 €.
- Si $x > 110$, paga 50 € més la diferència entre x i 110.

En aquest últim cas:

$$50 + (x - 110) = x - 60$$

Per tant, la funció és:

$$f(x) = \begin{cases} 100, & 0 \leq x < 80 \\ 0, & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60, & x > 110 \end{cases}$$

Continuïtat

Hem d'estudiar els punts on canvia la definició: $x = 80$ i $x = 110$.

En $x = 80$

Límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow 80^-} f(x) = 100$$

mentre que:

$$\lim_{x \rightarrow 80^+} f(x) = 0$$

Com que:

$$100 \neq 0$$

hi ha una **discontinuitat de salt** en $x = 80$.

En $x = 110$

Per l'esquerra:

$$\lim_{x \rightarrow 110^-} f(x) = 0$$

Per la dreta:

$$\lim_{x \rightarrow 110^+} f(x) = 110 - 60 = 50$$

Com que:

$$0 \neq 50$$

també hi ha una **discontinuitat de salt** en $x = 110$.

Resultat

La funció és contínua en $[0, 80)$, $(80, 110)$, $(110, +\infty)$

i és discontinua en:

$x = 80$ i $x = 110$

- b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per aquesta funció, l'eix OX , la recta d'equació $x = 120$ i la recta d'equació $x = 125$. (1 punt)

2.A.b. Àrea entre $x = 120$ i $x = 125$

Ens demanen l'àrea limitada per:

- la funció $f(x)$,
- l'eix OX ,
- $x = 120$,
- $x = 125$.

Com que entre 120 i 125 tenim $x > 110$, utilitzem:

$$f(x) = x - 60$$

Per tant, l'àrea és:

$$A = \int_{120}^{125} (x - 60) dx$$

Integram:

$$\int (x - 60) dx = \frac{x^2}{2} - 60x$$

Per tant:

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - 60x \right]_{120}^{125}$$

Calculem:

$$A = \left(\frac{125^2}{2} - 60(125) \right) - \left(\frac{120^2}{2} - 60(120) \right)$$

Primer:

$$\frac{125^2}{2} - 7500 = \frac{15625}{2} - 7500 = 7812,5 - 7500 = 312,5$$

Segon:

$$\frac{120^2}{2} - 7200 = 7200 - 7200 = 0$$

Per tant:

$$A = 312,5$$

 Resposta

$$312,5 \text{ unitats}^2$$

Com que l'eix horitzontal representa km/h i l'eix vertical euros, matemàticament seria **€·km/h**.

- c) En una altra carretera només se sanciona els vehicles amb velocitat superior a 120 km/h. Si la velocitat detectada pel radar no és superior a 120 km/h, el conductor no ha de pagar res; en cas contrari, ha de pagar el triple de la diferència entre la velocitat detectada pel radar i 120 km/h, en euros. A quines velocitats un conductor haurà de pagar el mateix en aquesta carretera que en l'anterior?

(1,25 punts)

2.A.c. Segona carretera

Ara tenim una nova carretera.

Només se sanciona si:

$$x > 120$$

I la multa és el triple de la diferència entre la velocitat i 120:

$$g(x) = 3(x - 120)$$

Per tant:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 120 \\ 3(x - 120), & x > 120 \end{cases}$$

Ens pregunten:

A quines velocitats pagarà el mateix que en la primera carretera?

Hem de comparar:

$$f(x) = g(x)$$

Cas 1: $x < 80$

A la primera carretera:

$$f(x) = 100$$

A la segona:

$$g(x) = 0$$

Per tant:

$$100 \neq 0$$

No hi ha solucions.

Cas 2: $80 \leq x \leq 110$

Primera carretera:

$$f(x) = 0$$

Segona carretera:

$$g(x) = 0$$

Per tant:

$$\boxed{80 \leq x \leq 110}$$

En totes aquestes velocitats paguen el mateix: **0 €**.

Cas 3: $110 < x \leq 120$

Primera carretera:

$$f(x) = x - 60$$

Segona carretera:

$$g(x) = 0$$

Igualtem:

$$x - 60 = 0$$

$$x = 60$$

Però 60 no pertany a l'interval $110 < x \leq 120$.

Per tant, **no hi ha solucions**.

Cas 4: $x > 120$

Ara:

$$f(x) = x - 60$$

i:

$$g(x) = 3(x - 120)$$

Igualtem:

$$x - 60 = 3(x - 120)$$

Desenvolupem:

$$x - 60 = 3x - 360$$

$$300 = 2x$$

$$\boxed{x = 150}$$

I com que:

$$150 > 120$$

és una solució vàlida.



Resposta final de l'apartat c)

Les velocitats en què el conductor paga el mateix en les dues carreteres són:

$$x \in [80, 110] \quad \text{o} \quad x = 150$$

És a dir:

entre 80 i 110 km/h, ambdós inclosos, o a 150 km/h