

Problema 2.B. Es considera la funció:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$$

Es demana:

a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos de coordenades.

(0,5 punts)

a) Domini i punts de tall amb els eixos

1. Domini

Una funció racional no està definida quan el denominador és zero.

Tenim:

$$1 + x^2 = 0$$

Però, com que:

$$x^2 \geq 0$$

sempre es compleix:

$$1 + x^2 > 0$$

Per tant, el denominador **mai és zero**.

Així:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

o, en intervals:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, +\infty)$$

2. Punt de tall amb l'eix Y

Per trobar el punt de tall amb l'eix Y, fem $x = 0$:

$$f(0) = (0^2 - 0)/(1 + 0^2) = 0$$

Per tant, el punt és:

$$(0, 0)$$

3. Punts de tall amb l'eix X

Per tallar l'eix X necessitem que:

$$f(x) = 0$$

Una fracció és zero quan el numerador és zero:

$$x^2 - x = 0$$

Factoritzem:

$$x(x - 1) = 0$$

Per tant:

$$x = 0 \text{ o } x = 1$$

Els punts de tall amb l'eix X són:

$$(0, 0) \text{ i } (1, 0)$$

Resultat de l'apartat a)

- Domini: $\mathbb{R}$
- Tall amb l'eix Y: $(0, 0)$
- Talls amb l'eix X: $(0, 0)$ i $(1, 0)$

b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(0,5 punts)

b) Asímtotes horitzontals i verticals

1. Asímtotes verticals

Les asímtotes verticals apareixen en els valors que anul·len el denominador.

Hem vist que:

$$1 + x^2 \neq 0$$

per a qualsevol nombre real.

Per tant:

No hi ha asímtotes verticals.

2. Asímtota horitzontal

Calculem el límit quan x tendeix a $\pm\infty$:

$$\lim f(x) = \lim [(x^2 - x)/(1 + x^2)]$$

Com que numerador i denominador són polinomis del mateix grau, l'asímtota horitzontal és el quocient dels coeficients dels termes de grau més alt:

$$y = 1/1 = 1$$

Per tant:

Asímtota horitzontal: $y = 1$

Una observació important per al gràfic

La funció pot **tallar l'asímtota horitzontal**. Ho podem comprovar:

$$f(x) = 1$$

$$(x^2 - x)/(1 + x^2) = 1$$

$$x^2 - x = 1 + x^2$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

I:

$$f(-1) = 1$$

Per tant, la gràfica passa pel punt:

$$(-1, 1)$$

que és un punt especialment útil per dibuixar-la.

Resultat de l'apartat b)

- **Asímtotes verticals:** cap.
- **Asímtota horitzontal:** $y = 1$.

- c) Els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals, si n'hi ha, i el valor d'estos. (2 punts)

c) Creixement, decreixement i extrems

Ara necessitem estudiar la **derivada primera**.

Tenim:

$$f(x) = (x^2 - x)/(1 + x^2)$$

Apliquem la regla del quocient:

$$f'(x) = [(2x - 1)(1 + x^2) - (x^2 - x)(2x)] / (1 + x^2)^2$$

Desenvolupem el numerador:

$$(2x - 1)(1 + x^2) = 2x - 1 + 2x^3 - x^2$$

i

$$2x(x^2 - x) = 2x^3 - 2x^2$$

Per tant:

$$f'(x) = [2x - 1 + 2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2] / (1 + x^2)^2$$

Simplificant:

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 1)/(1 + x^2)^2$$

1. Punts crítics

Busquem on la derivada és zero:

$$f'(x) = 0$$

Com que el denominador sempre és positiu, només hem de resoldre:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

Utilitzem la fórmula de segon grau:

$$x = (-2 \pm \sqrt{4 + 4})/2$$

$$x = (-2 \pm \sqrt{8})/2$$

$$x = (-2 \pm 2\sqrt{2})/2$$

Per tant:

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,414$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,414$$

Aquests són els dos punts crítics.

2. Estudi del signe de la derivada

El denominador:

$$(1 + x^2)^2$$

és sempre positiu.

Per tant, el signe de $f'(x)$ depén únicament de:

$$x^2 + 2x - 1$$

Com que és una paràbola amb coeficient principal positiu, tenim:

- positiva abans de x_1 ,
- negativa entre x_1 i x_2 ,
- positiva després de x_2 .

Així:

Interval	Signe de $f'(x)$	Comportament
$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$	+	Creixent
$(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$	-	Decreixent
$(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$	+	Creixent

Per tant:

Creixent:

$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ i $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$

Decreixent:

$(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$

3. Màxim local

En:

$$x = -1 - \sqrt{2}$$

la funció passa de **creixent a decreixent**.

Per tant, tenim un **màxim local**.

Cal calcular la coordenada y :

$$f(-1 - \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})/2$$

Aproximadament:

$$f(-1 - \sqrt{2}) \approx 1,207$$

Per tant, el màxim local és:

$$M = (-1 - \sqrt{2}, (1 + \sqrt{2})/2)$$

Aproximadament:

$$M \approx (-2,414 ; 1,207)$$

4. Mínim local

En:

$$x = -1 + \sqrt{2}$$

la funció passa de **decreixent a creixent**.

Per tant, tenim un **mínim local**.

Calculem el valor de la funció:

$$f(-1 + \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})/2$$

Aproximadament:

$$f(-1 + \sqrt{2}) \approx -0,207$$

Per tant, el mínim local és:

$$m = (-1 + \sqrt{2}, (1 - \sqrt{2})/2)$$

Aproximadament:

$$m \approx (0,414 ; -0,207)$$

- d) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors. *(0,5 punts)*

