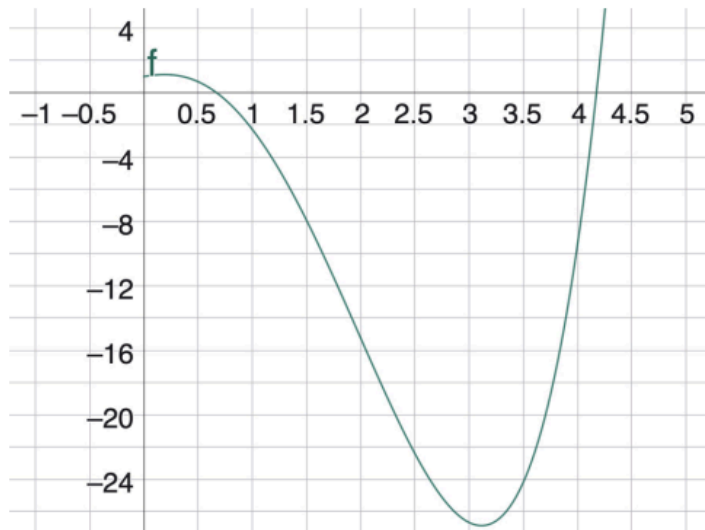


Problema 2. — Donada la funció $f(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, que té la representació gràfica següent:



(a) [1 punt] Calcula els límits de la funció en els extrems del seu domini.

1. Simplifiquem primer la funció

Com que estem dividint tots els termes entre $\sqrt{x}$:

$$f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{x}} - \frac{6x^3}{\sqrt{x}} + \frac{e^x \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Utilitzant les propietats de les potències:

$$\frac{x^4}{\sqrt{x}} = \frac{x^4}{x^{1/2}} = x^{4-\frac{1}{2}} = x^{7/2}$$

i

$$\frac{6x^3}{\sqrt{x}} = 6x^{3-\frac{1}{2}} = 6x^{5/2}$$

Per tant:

$$f(x) = x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x$$

Aquesta forma ens facilitarà molt els càlculs.

a) Calcula els límits de la funció en els extrems del seu domini

Pas 1. Determinem el domini

La funció original conté $\sqrt{x}$ al denominador.

Per tant, necessitem:

$$x > 0$$

Així:

$$D_f = (0, +\infty)$$

Els extrems del domini són:

$$x \rightarrow 0^+$$

i

$$x \rightarrow +\infty$$

Pas 2. Límit quan $x \rightarrow 0^+$

Tenim:

$$f(x) = x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x$$

Quan $x \rightarrow 0^+$:

$$x^{7/2} \rightarrow 0$$

$$-6x^{5/2} \rightarrow 0$$

i:

$$e^x \rightarrow e^0 = 1$$

Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 0 + 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1}$$

Interpretació gràfica

La gràfica s'acosta al punt:

$$\boxed{(0, 1)}$$

quan x s'acosta a 0 per la dreta.

Important: $x = 0$ no pertany al domini, però el límit existeix i val 1.

Pas 3. Límit quan $x \rightarrow +\infty$

Tenim:

$$f(x) = x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x$$

Quan:

$$x \rightarrow +\infty$$

els termes de potències creixen, però el terme exponencial e^x creix molt més ràpid.

Per tant:

$$e^x \rightarrow +\infty$$

i, en conseqüència:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

(b) [1 punt] Calcula l'àrea compresa entre $f(x)$, $y = -1$, $x = 2$ i $x = 4$.

b) Àrea compresa entre $f(x)$, $y = -1$, $x = 2$ i $x = 4$

Ara hem de calcular l'àrea entre:

- la corba $y = f(x)$,
- la recta $y = -1$,
- $x = 2$,
- $x = 4$.

La primera cosa que hem de comprovar és **quina funció queda per damunt** de l'altra.

Pas 1. Compareu $f(x)$ amb $y = -1$

Volem estudiar:

$$f(x) - (-1) = f(x) + 1$$

És a dir:

$$f(x) + 1 = x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x + 1$$

En l'interval $[2, 4]$, la gràfica ens mostra que:

$$f(x) < -1$$

Per exemple, en $x = 2$:

$$f(2) = 2^{7/2} - 6(2^{5/2}) + e^2$$

$$\approx 11,31 - 33,94 + 7,39$$

$$\approx -15,24$$

Per tant:

$$f(2) < -1$$

I la corba es manté per davall de $y = -1$ en l'interval considerat.

Així, l'àrea és:

$$A = \int_2^4 [-1 - f(x)] dx$$

o, equivalentment,

$$A = - \int_2^4 (f(x) + 1) dx$$

Pas 2. Plantegem la integral

Substituïm $f(x)$:

$$A = - \int_2^4 \left(x^{7/2} - 6x^{5/2} + e^x + 1 \right) dx$$

Pas 3. Calculem una primitiva

Integrem terme a terme.

Primer terme

$$\int x^{7/2} dx = \frac{x^{9/2}}{9/2} = \frac{2}{9} x^{9/2}$$

Segon terme

$$\begin{aligned} \int -6x^{5/2} dx &= -6 \frac{x^{7/2}}{7/2} \\ &= -\frac{12}{7} x^{7/2} \end{aligned}$$

Tercer terme

$$\int e^x dx = e^x$$

Quart terme

$$\int 1 \, dx = x$$

Per tant, una primitiva de $f(x) + 1$ és:

$$F(x) = \frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{12}{7}x^{7/2} + e^x + x$$

Pas 4. Avaluem entre 2 i 4

Tenim:

$$A = -[F(4) - F(2)]$$

Calculem primer $F(4)$.

Com que:

$$4^{7/2} = 128$$

i:

$$4^{9/2} = 512$$

tenim:

$$F(4) = \frac{2}{9}(512) - \frac{12}{7}(128) + e^4 + 4$$

$$F(4) = \frac{1024}{9} - \frac{1536}{7} + e^4 + 4$$

Ara $F(2)$:

$$2^{7/2} = 8\sqrt{2}$$

i:

$$2^{9/2} = 16\sqrt{2}$$

Per tant:

$$F(2) = \frac{2}{9}(16\sqrt{2}) - \frac{12}{7}(8\sqrt{2}) + e^2 + 2$$

$$F(2) = \frac{32\sqrt{2}}{9} - \frac{96\sqrt{2}}{7} + e^2 + 2$$

Finalment:

$$A = -[F(4) - F(2)]$$

i simplificant:

$$A = \frac{6530}{63} - \frac{640\sqrt{2}}{63} + e^2 - e^4$$

Numèricament:

$$A \approx 42,08$$

unitats quadrades.