

Problema 2. — [2 punts] Sigui $f(x) = \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x)$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

1. Substituïm $x = 0$

Mirem què passa amb cada part:

$$\frac{4x^3}{x^2 + 1}$$

Quan $x \rightarrow 0^+$:

$$\frac{4x^3}{x^2 + 1} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

Per altra banda:

$$\ln(x) \rightarrow -\infty$$

Per tant, tenim:

$$0 \cdot (-\infty)$$

Això és una **indeterminació** del tipus:

$$\boxed{0 \cdot \infty}$$

Per tant, hem de transformar l'expressió.

2. Separem la part important

Podem escriure:

$$\frac{4x^3}{x^2+1} \ln(x) = \frac{4}{x^2+1} x^3 \ln(x)$$

Quan $x \rightarrow 0^+$:

$$\frac{4}{x^2+1} \rightarrow 4$$

Per tant, només hem d'estudiar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x)$$

3. Calculem $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x)$

Fem el canvi:

$$t = \frac{1}{x}$$

Quan:

$$x \rightarrow 0^+$$

tenim:

$$t \rightarrow +\infty$$

A més:

$$x = \frac{1}{t}$$

Per tant:

$$x^3 \ln(x) = \frac{1}{t^3} \ln\left(\frac{1}{t}\right)$$

Com que:

$$\ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t)$$

obtenim:

$$x^3 \ln(x) = -\frac{\ln(t)}{t^3}$$

Així:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}$$

Sabem que el polinomi t^3 creix molt més ràpidament que $\ln(t)$, per tant:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} = 0$$

i, per tant:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) = 0}$$

4. Tornem a la funció original

Recordem:

$$\frac{4}{x^2 + 1} x^3 \ln(x)$$

Hem trobat que:

$$\frac{4}{x^2 + 1} \rightarrow 4$$

i:

$$x^3 \ln(x) \rightarrow 0$$

Per tant:

$$4 \cdot 0 = 0$$

Així:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x) = 0$$

Idea clau: encara que $\ln(x) \rightarrow -\infty$, el factor x^3 tendeix a zero molt més ràpidament, de manera que el producte acaba tendint a 0.