

3.1 Es consideren els punts de l'espai $A(0, -1, 0)$ i $B(1, 0, 1)$, i el vector $v = (2, -1, 1)$.

3.1.1 (0.75 punts) Troba una equació del pla π que és perpendicular a v i passa per A .

3.1.1. Equació del pla π

Ens demanen un pla que:

- siga **perpendicular a $\vec{v}$** ;
- passe pel punt $A(0, -1, 0)$.

1. Vector normal del pla

Si un pla és perpendicular a un vector $\vec{v}$, aquest vector és un **vector normal del pla**.

Per tant:

$$\vec{n} = (2, -1, 1)$$

L'equació d'un pla amb vector normal (a, b, c) que passa per (x_0, y_0, z_0) és:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Substituïm:

$$2(x - 0) - 1(y - (-1)) + 1(z - 0) = 0$$

$$2x - (y + 1) + z = 0$$

$$2x - y + z - 1 = 0$$

 **Resultat**

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0$$

3.1.2 (0.75 punts) Troba una equació de la recta que és perpendicular a π i passa per B .

3.1.2. Equació de la recta perpendicular a π que passa per B

Una recta perpendicular a un pla té com a **vector director** un **vector normal** del pla.

Ja sabem que:

$$\vec{n} = (2, -1, 1)$$

Per tant, aquest serà el vector director de la recta.

La recta ha de passar per:

$$B(1, 0, 1)$$

L'equació vectorial és:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(2, -1, 1)$$

Per tant:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3.1.3 (0.75 punts) Troba el punt C del pla π que està més prop de B .

3.1.3. Trobar el punt C del pla π més proper a B

El punt del pla més proper a B és el punt on la perpendicular des de B al pla talla el pla.

Ja tenim aquesta recta:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Per tant, hem de trobar el valor de t perquè el punt de la recta estiga en el pla:

$$2x - y + z - 1 = 0$$

Substituïm les coordenades de la recta:

$$2(1 + 2t) - (-t) + (1 + t) - 1 = 0$$

Desenvolupem:

$$2 + 4t + t + 1 + t - 1 = 0$$

$$2 + 6t = 0$$

$$6t = -2$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

Ara substituïm aquest valor en la recta.

Coordenada x

$$x = 1 + 2 \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$x = 1 - \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Coordenada y

$$y = - \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$y = \frac{1}{3}$$

Coordenada z

$$z = 1 - \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{2}{3}$$

Per tant:

$$C \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Aquest és el punt del pla que està més a prop de B .

3.1.4 (0.25 punts) Calcula la distància del punt B al pla π .

3.1.4. Distància de B al pla π

Podem utilitzar la fórmula de la distància d'un punt a un pla.

Si:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

i el punt és:

$$B(x_0, y_0, z_0)$$

la distància és:

$$d(B, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

El nostre pla és:

$$2x - y + z - 1 = 0$$

Per tant:

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = -1$$

i:

$$B = (1, 0, 1)$$

Substituïm:

$$\begin{aligned} d(B, \pi) &= \frac{|2(1) - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Racionalitzant:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

$$d(B, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Aproximadament:

$$d(B, \pi) \approx 0,816$$