

3.1 Donats els punts $A(1, -2, 1)$ i $B(3, 4, 3)$, i la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z - 1$:

3.1.1 (1 punt) Obtén l'equació del pla π_1 respecte al qual A i B són punts simètrics.

3.1.1. Pla respecte del qual A i B són punts simètrics

Si dos punts A i B són simètrics respecte d'un pla, aquest pla és el **pla mediador** del segment AB .

Això significa dues coses:

1. El pla passa pel **punt mitjà** de AB .
2. El pla és **perpendicular** al vector AB .

Pas 1. Calculem el punt mitjà de AB

$A(1, -2, 1)$

$B(3, 4, 3)$

El punt mitjà és:

$$M = ((1+3)/2, (-2+4)/2, (1+3)/2)$$

Per tant:

$$M = (2, 1, 2)$$

Pas 2. Calculem el vector AB

$$AB = B - A$$

$$AB = (3-1, 4-(-2), 3-1)$$

Per tant:

$$AB = (2, 6, 2)$$

Aquest vector és **normal al pla π_1** .

Podem simplificar-lo dividint per 2:

$$n = (1, 3, 1)$$

Pas 3. Equació del pla

L'equació d'un pla amb vector normal $n = (1, 3, 1)$ que passa per $M(2,1,2)$ és:

$$1(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

Desenvolupem:

$$x - 2 + 3y - 3 + z - 2 = 0$$

Per tant:

$$x + 3y + z - 7 = 0$$

 **Resultat**

$\pi_1 : x + 3y + z - 7 = 0$

3.1.2 (0.5 punts) Comprova que la recta r està continguda en el pla π_1 .

3.1.2. Comprova que la recta r està continguda en π_1

Tenim:

$$r: x/2 = (y-2)/(-1) = z-1$$

Posem totes les expressions iguals a un paràmetre t :

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z-1 = t$$

Així:

- $x = 2t$
- $y - 2 = -t \rightarrow y = 2 - t$
- $z - 1 = t \rightarrow z = 1 + t$

Per tant, l'equació paramètrica de r és:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Pas 1. Substituïm en l'equació de π_1

Recordem:

$$\pi_1: x + 3y + z - 7 = 0$$

Substituïm:

$$x = 2t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = 1 + t$$

Obtenim:

$$2t + 3(2 - t) + (1 + t) - 7$$

Desenvolupem:

$$2t + 6 - 3t + 1 + t - 7$$

Agrupem:

$$(2t - 3t + t) + (6 + 1 - 7)$$

$$0 + 0 = 0$$

Això es compleix per a qualsevol valor de t .

Per tant, **tots els punts de la recta r pertanyen al pla π_1 .**



Resultat

$$r \subset \pi_1$$

3.1.3 (1 punt) Obtén l'equació del pla π_2 que conté el punt A de manera que la intersecció amb π_1 és la recta r .

3.1.3. Obtén el pla π_2 que conté A i tal que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$

Ara busquem un pla π_2 que:

1. Continga el punt $A(1, -2, 1)$.
2. Continga la recta r .

Si un pla conté una recta, podem agafar:

- un punt de la recta,
- el vector director de la recta,
- un altre vector que vagi des d'aquest punt fins a A .

Pas 1. Agafem un punt de r

De l'equació paramètrica:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Si $t = 0$, obtenim:

$$P = (0, 2, 1)$$

Per tant, P és un punt de r .

Pas 2. Vector director de r

De les equacions paramètriques:

$$x = 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 1 + t$$

el vector director és:

$$d = (2, -1, 1)$$

Pas 3. Un altre vector contingut en π_2

Com que π_2 ha de passar per P i A, considerem el vector:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{A} - \mathbf{P}$$

$$\mathbf{PA} = (1-0, -2-2, 1-1)$$

Per tant:

$$\mathbf{PA} = (1, -4, 0)$$

Així, el pla π_2 conté els dos vectors:

- $\mathbf{d} = (2, -1, 1)$
- $\mathbf{PA} = (1, -4, 0)$

Pas 4. Calculem un vector normal al pla

El vector normal serà el producte vectorial:

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{d} \times \mathbf{PA}$$

Tenim:

$$\mathbf{d} = (2, -1, 1)$$

$$\mathbf{PA} = (1, -4, 0)$$

Calculem:

$$\mathbf{d} \times \mathbf{PA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Per tant:

- component x: $(-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-4) = 4$
- component y: $-[2 \cdot 0 - 1 \cdot 1] = 1$
- component z: $2 \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 = -7$

Així:

$$\mathbf{n}_2 = (4, 1, -7)$$

Pas 5. Equació del pla π_2

Utilitzem el punt $A(1, -2, 1)$ i el vector normal:

$$\mathbf{n}_2 = (4, 1, -7)$$

L'equació és:

$$4(x - 1) + (y + 2) - 7(z - 1) = 0$$

Desenvolupem:

$$4x - 4 + y + 2 - 7z + 7 = 0$$

$$4x + y - 7z + 5 = 0$$

Per tant:

 **Resultat**

$\pi_2 : 4x + y - 7z + 5 = 0$

Comprovació final

És important comprovar que realment $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.

Sabem que:

- r està continguda en π_1 .
- π_2 s'ha construït perquè continga r .

Per tant, r està continguda en tots dos plans.

A més, els plans π_1 i π_2 **no són el mateix pla**, perquè els seus vectors normals:

- $n_1 = (1, 3, 1)$
- $n_2 = (4, 1, -7)$

no són proporcionals.

Per tant, dos plans diferents que tenen una recta comuna s'intersequen precisament en aquesta recta.

Així:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = r$$