

3.1 Donada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ i el pla $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$:

3.1.1 (0.5 punts) Calcula el valor de m per al qual π i r són perpendiculars.

Pas previ: vectors característics

Vector director de la recta

De l'equació contínua de la recta,

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} = t,$$

obtenim les equacions paramètriques:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Per tant,

- un punt de la recta és

$$P(0, -1, 1),$$

- i el vector director és

$$\vec{d} = (2, -1, 1).$$

Vector normal del pla

El pla

$$2x + my + z - 3 = 0$$

té com a vector normal

$$\vec{n} = (2, m, 1).$$

3.1.1 Calcula el valor de m perquè el pla i la recta siguin perpendiculars. (0,5 punts)

Una recta és perpendicular a un pla quan el seu vector director és paral·lel al vector normal del pla.

Per tant,

$$(2, -1, 1) = k(2, m, 1).$$

Comparem coordenades.

De la primera,

$$2 = 2k$$

$$k = 1.$$

De la tercera,

$$1 = k,$$

que també dona

$$k = 1.$$

Finalment,

$$-1 = m.$$

Resposta

$m = -1$

3.1.2 (0.75 punts) Calcula el valor de m per al qual π i r són paral·lels.

3.1.2 Calcula el valor de m perquè el pla i la recta siguin paral·lels. (0,75 punts)

Una recta és **paral·lela** a un pla quan el seu vector director és perpendicular al vector normal.

Per tant,

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0.$$

Calculem el producte escalar:

$$(2, -1, 1) \cdot (2, m, 1) = 4 - m + 1.$$

$$5 - m = 0.$$

Per tant,

$m = 5.$

3.1.3 (1.25 punts) Calcula, quan siga possible, el punt d'intersecció entre π i r en funció del paràmetre real m .

3.1.3 Calcula, quan siga possible, el punt d'intersecció entre el pla i la recta en funció de m . (1,25 punts)

Substituïm les equacions paramètriques de la recta al pla.

Recordem:

$$x = 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 1 + t.$$

Substituïm en

$$2x + my + z - 3 = 0.$$

$$2(2t) + m(-1 - t) + (1 + t) - 3 = 0.$$

Desenvolupem:

$$4t - m - mt + 1 + t - 3 = 0.$$

Agrupem:

$$(5 - m)t - (m + 2) = 0.$$

D'on

$$t = \frac{m + 2}{5 - m}, \quad m \neq 5.$$

Calculem les coordenades

Coordenada x

$$x = 2t = \frac{2(m + 2)}{5 - m}.$$

Coordenada y

$$y = -1 - t = -1 - \frac{m+2}{5-m}.$$

Posem denominador comú:

$$y = \frac{-(5-m) - (m+2)}{5-m} = -\frac{7}{5-m}.$$

Coordenada z

$$z = 1 + t = 1 + \frac{m+2}{5-m} = \frac{5-m+m+2}{5-m} = \frac{7}{5-m}.$$

Punt d'intersecció

Per tant,

$$P \left(\frac{2(m+2)}{5-m}, -\frac{7}{5-m}, \frac{7}{5-m} \right), \quad m \neq 5.$$

Cas especial $m = 5$

En aquest cas,

$$(5-m)t - (m+2) = 0$$

es transforma en

$$0 \cdot t - 7 = 0,$$

que és impossible.

Per tant,

- la recta és paral·lela al pla,
- no hi ha cap punt d'intersecció.