

3.2 Donat el pla $\pi: 2x + 3y - z = 0$ i els punts $A(0,0,0)$, $B(10,0,-20)$, $C(0,15,-30)$ i $D(1,2,-1)$:

3.2.1 (0.5 punts) Estudia si el triangle ABC està contingut en el pla π .

3.2.1. Estudiar si el triangle ABC està contingut en el pla π

Perquè el triangle ABC estiga contingut en el pla π , els tres vèrtexs A, B, C han de pertànyer al pla.

El pla és:

$$2x + 3y - z = 0$$

Punt $A = (0, 0, 0)$

Substituïm:

$$2(0) + 3(0) - 0 = 0$$

Per tant:

$$A \in \pi$$

✓

Punt $B = (10, 0, -20)$

$$\begin{aligned} 2(10) + 3(0) - (-20) \\ = 20 + 20 = 40 \end{aligned}$$

Com que:

$$40 \neq 0$$

tenim:

$$B \notin \pi$$

Per tant, **ja podem concloure** que el triangle no està contingut en π .

Per completar la comprovació, també podem mirar C :

$$\begin{aligned} 2(0) + 3(15) - (-30) \\ = 45 + 30 = 75 \neq 0 \end{aligned}$$

Per tant:

$$C \notin \pi$$

 **Resposta 3.2.1**

No, el triangle ABC no està contingut en el pla π .

De fet, només A pertany a π .

3.2.2 (1.25 punts) Calcula les coordenades de la projecció del punt D sobre el pla format pels punts A , B i C .

3.2.2. Projecció del punt D sobre el pla format per A , B , C

 **Important:** aquí no hem de projectar D sobre el pla π de l'apartat anterior.

L'enunciat demana la projecció sobre el **pla que formen A , B , C** .

1. Determinem el pla ABC

Com que:

$$A = (0, 0, 0)$$

podem construir dos vectors del pla:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\overrightarrow{AB} = (10, 0, -20)$$

i:

$$\overrightarrow{AC} = C - A$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 15, -30)$$

Necessitem un vector normal al pla. El podem obtenir amb el producte vectorial:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Calculem:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = (0(-30) - (-20)(15), -[10(-30) - (-20)(0)], 10(15) - 0(0))$$

$$\vec{n} = (300, 300, 150)$$

Podem simplificar dividint entre 150:

$$\boxed{\vec{n} = (2, 2, 1)}$$

2. Equació del pla ABC

L'equació d'un pla amb normal:

$$\vec{n} = (2, 2, 1)$$

és:

$$2x + 2y + z + d = 0$$

Com que passa per $A = (0, 0, 0)$:

$$d = 0$$

Per tant:

$$\sigma : 2x + 2y + z = 0$$

Aquest és el pla que conté el triangle ABC .

3. Recta perpendicular al pla que passa per D

El vector normal del pla és:

$$\vec{n} = (2, 2, 1)$$

Per tant, la recta perpendicular al pla que passa per:

$$D = (1, 2, -1)$$

és:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

La projecció de D serà el punt on aquesta recta talla el pla σ .

4. Trobem el punt d'intersecció

Substituïm la recta en:

$$2x + 2y + z = 0$$

$$2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) + (-1 + t) = 0$$

Desenvolupem:

$$2 + 4t + 4 + 4t - 1 + t = 0$$

$$5 + 9t = 0$$

$$9t = -5$$

$$t = -\frac{5}{9}$$

Ara substituïm aquest valor en la recta.

Coordenada x

$$x = 1 + 2\left(-\frac{5}{9}\right)$$

$$x = 1 - \frac{10}{9}$$

$$x = -\frac{1}{9}$$

Coordenada y

$$y = 2 + 2\left(-\frac{5}{9}\right)$$

$$y = 2 - \frac{10}{9}$$

$$y = \frac{8}{9}$$

Coordenada z

$$z = -1 - \frac{5}{9}$$

$$z = -\frac{14}{9}$$

Per tant, la projecció és:

$$P\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right)$$

 Resposta 3.2.2

$$P\left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right)$$

3.2.3 (0.75 punts) Calcula la distància del punt D al pla π .

3.2.3. Distància del punt D al pla π

Ara sí que tornem al pla original:

$$\pi : 2x + 3y - z = 0$$

I el punt:

$$D = (1, 2, -1)$$

La fórmula de la distància d'un punt $D(x_0, y_0, z_0)$ a un pla

$$ax + by + cz + d = 0$$

és:

$$d(D, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En el nostre cas:

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -1, \quad d = 0$$

Substituïm:

$$d(D, \pi) = \frac{|2(1) + 3(2) - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}}$$

Numerador:

$$2 + 6 + 1 = 9$$

Denominador:

$$\sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

Per tant:

$$d(D, \pi) = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

Si racionalitzem:

$$\frac{9}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{9\sqrt{14}}{14}}$$

Aproximadament:

$$\boxed{d(D, \pi) \approx 2,405}$$