

3.2 Donats el pla $\pi: -2x + y + 2z + 1 = 0$ i el punt $P(1, -2, 0)$:

3.2.1 (0.5 punts) Calcula la distància del punt P al pla π .

3.2.1. Distància del punt P al pla π

Per calcular la distància d'un punt $P(x_0, y_0, z_0)$ a un pla

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

utilitzem:

$$d(P, \pi) = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

En el nostre cas:

- $A = -2$
- $B = 1$
- $C = 2$
- $D = 1$
- $P(1, -2, 0)$

Substituïm:

$$d(P, \pi) = |-2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 1| / \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}$$

Calculem el numerador:

$$-2 - 2 + 0 + 1 = -3$$

Per tant:

$$|-3| = 3$$

I el denominador:

$$\sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Així:

$$d(P, \pi) = 3/3 = 1$$



Resultat

$$d(P, \pi) = 1$$

La distància del punt P al pla és **1 unitat**.

3.2.2 (1 punt) Escriu una equació de la recta perpendicular a π que passa pel punt P .

3.2.2. Recta perpendicular a π que passa pel punt P

Per construir una recta perpendicular a un pla necessitem un **vector director perpendicular al pla**.

El vector normal del pla és directament el que formen els coeficients de x , y i z :

$$\mathbf{n} = (-2, 1, 2)$$

Aquest serà el vector director de la recta perpendicular.

La recta ha de passar pel punt:

$$P(1, -2, 0)$$

Recordem que l'equació d'una recta en forma paramètrica és:

$$(x, y, z) = P + t \cdot v$$

Per tant:

$$(x, y, z) = (1, -2, 0) + t(-2, 1, 2)$$

Obtenim:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

Comprovació

El vector director de la recta és:

$$\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$$

i és precisament el vector normal del pla:

$$\mathbf{n} = (-2, 1, 2)$$

Per tant, la recta és perpendicular al pla.

 Resultat

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

3.2.3 (1 punt) Determina els angles interiors del triangle els vèrtexs del qual són els punts d'intersecció del pla π amb els tres eixos coordenats.

3.2.3. Angles interiors del triangle determinat pels eixos

Ara hem de trobar els tres punts d'intersecció del pla amb els eixos coordenats.

El pla és:

$$-2x + y + 2z + 1 = 0$$

Pas 1. Intersecció amb l'eix X

En l'eix X tenim:

$$y = 0 \text{ i } z = 0$$

Substituïm:

$$-2x + 1 = 0$$

Per tant:

$$x = 1/2$$

El primer vèrtex és:

$$A \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right)$$

Pas 2. Intersecció amb l'eix Y

En l'eix Y:

$$x = 0 \text{ i } z = 0$$

Substituïm:

$$y + 1 = 0$$

Per tant:

$$y = -1$$

Segon vèrtex:

$$B(0, -1, 0)$$

Pas 3. Intersecció amb l'eix Z

En l'eix Z:

$$x = 0 \text{ i } y = 0$$

Substituïm:

$$2z + 1 = 0$$

Per tant:

$$z = -1/2$$

Tercer vèrtex:

$$C\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Per tant, el triangle té els vèrtexs:

$$A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad B(0, -1, 0), \quad C\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Pas 4. Calculem l'angle en A

Per trobar l'angle en A utilitzem els vectors **AB** i **AC**.

Vector AB

$$AB = B - A$$

$$AB = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right)$$

Vector AC

$$AC = C - A$$

$$AC = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Utilitzem la fórmula del producte escalar:

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(\alpha)$$

Per tant:

$$\cos(A) = (AB \cdot AC) / (|AB| \cdot |AC|)$$

Producte escalar

$$AB \cdot AC = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)(0) + 0 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AB \cdot AC = \frac{1}{4}$$

Mòduls

$$|AB| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|AC| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per tant:

$$\cos(A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos(A) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Així:

$$A = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Aproximadament:

$$A \approx 71,57^\circ$$

Pas 5. Calculem l'angle en B

Ara utilitzem els vectors **BA** i **BC**.

Vector BA

$$BA = A - B = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

Vector BC

$$BC = C - B = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

Producte escalar:

$$BA \cdot BC = \frac{1}{2}(0) + 1(1) + 0\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Mòduls:

$$|BA| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|BC| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Per tant:

$$\cos(B) = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$\cos(B) = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$$

Així:

$$B = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

I aproximadament:

$$B \approx 36,87^\circ$$

Pas 6. Calculem l'angle en C

Podem fer el mateix procediment, però també podem aprofitar que la suma dels angles interiors d'un triangle és 180° .

Tenim:

$$A \approx 71,57^\circ$$

$$B \approx 36,87^\circ$$

Per tant:

$$C = 180^\circ - 71,57^\circ - 36,87^\circ$$

$$C \approx 71,56^\circ$$

Més exactament:

$$C = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

i:

$$C \approx 71,57^\circ$$



Comprovació

La suma dels tres angles és:

$$71,57^\circ + 36,87^\circ + 71,57^\circ \approx 180,01^\circ$$

La xicoteta diferència és deguda a l'arrodoniment.

Per tant:

$$A + B + C = 180^\circ$$