

3.2 Considerem la recta s de l'espai amb equació:

$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

3.2.1 (0.5 punts) Troba una equació del pla que passa pel punt $(1,1,1)$ i és perpendicular a s .

Pas previ: equacions paramètriques de la recta

Prenem

$$y-1 = t.$$

Aleshores,

$$\frac{z-1}{-1} = t$$

i resulta

$$z = 1 - t.$$

Com que

$$\frac{x-1}{0} = t,$$

necessàriament

$$x = 1.$$

Per tant, les equacions paramètriques són

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Un punt de la recta és

$$P(1, 1, 1),$$

i el seu vector director és

$$\vec{d} = (0, 1, -1).$$

3.2.1 Troba una equació del pla que passa per $(1, 1, 1)$ i és perpendicular a s . (0,5 punts)

Si un pla és perpendicular a una recta, el vector director de la recta és un vector normal del pla.

Per tant,

$$\vec{n} = (0, 1, -1).$$

Utilitzem l'equació del pla

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Substituint

$$(0, 1, -1), \quad (1, 1, 1),$$

obtenim

$$0(x - 1) + (y - 1) - (z - 1) = 0.$$

Simplificant,

$$y - z = 0.$$

Resposta

$$y - z = 0.$$

3.2.2 (1 punt) Troba els punts de la recta s que estan a distància 4 de l'origen.

3.2.2 Troba els punts de la recta que estan a distància 4 de l'origen. (1 punt)

Els punts de la recta són

$$(1, 1 + t, 1 - t).$$

La distància a l'origen és

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4.$$

Elevem al quadrat:

$$1^2 + (1 + t)^2 + (1 - t)^2 = 16.$$

Desenvolupem:

$$1 + (1 + 2t + t^2) + (1 - 2t + t^2) = 16.$$

Simplifiquem:

$$3 + 2t^2 = 16.$$

$$2t^2 = 13.$$

$$t^2 = \frac{13}{2}.$$

Per tant,

$$t = \pm \sqrt{\frac{13}{2}} = \pm \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Primer punt

Per

$$t = \frac{\sqrt{26}}{2},$$

$$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2} \right).$$

Segon punt

Per

$$t = -\frac{\sqrt{26}}{2},$$

$$\left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

Resposta

Els punts són

$$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \quad \text{i} \quad \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

3.2.3 (1 punt) Calcula l'angle que forma la recta s amb l'eix Z .

3.2.3 Calcula l'angle que forma la recta amb l'eix Z . (1 punt)

El vector director de la recta és

$$\vec{d} = (0, 1, -1).$$

El vector director de l'eix Z és

$$\vec{k} = (0, 0, 1).$$

L'angle entre dos vectors compleix

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{k}|}{|\vec{d}| |\vec{k}|}.$$

Calculem el producte escalar:

$$\vec{d} \cdot \vec{k} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1.$$

Com que volem l'angle menor,

$$|\vec{d} \cdot \vec{k}| = 1.$$

Les longituds són

$$|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{k}| = 1.$$

Així,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Per tant,

$$\theta = 45^\circ$$

(o bé $\theta = \frac{\pi}{4}$ radians).