

Problema 3. El 30% dels youtubers escriuen guions originals i es poden considerar talentosos. El 70% restant copien tendències i es consideren no talentosos. Si el creador és talentós, té una probabilitat de 0,5 que un vídeo es faça viral. Si el creador no és talentós, la probabilitat que un vídeo es faça viral és de 0,05. Calculeu:

- a) La probabilitat que el següent vídeo que es publique siga viral. (0,75 punts)

1. Definim els esdeveniments

Siga:

- T : el creador és **talentós**.
- $\overline{T}$: el creador **no és talentós**.
- V : el vídeo es fa **viral**.

Les dades que ens dona l'enunciat són:

$$P(T) = 0,30$$

$$P(\overline{T}) = 0,70$$

Si és talentós:

$$P(V | T) = 0,5$$

Si no és talentós:

$$P(V | \overline{T}) = 0,05$$

a) Probabilitat que el següent vídeo es faça viral

En aquest cas hem de tenir en compte les **dues possibilitats**: que el creador siga talentós o que no ho siga.

Utilitzem el **teorema de la probabilitat total**:

$$P(V) = P(T) \cdot P(V | T) + P(\overline{T}) \cdot P(V | \overline{T})$$

Substituïm les dades:

$$P(V) = 0,30 \cdot 0,5 + 0,70 \cdot 0,05$$

$$P(V) = 0,15 + 0,035$$

$$P(V) = 0,185$$

En percentatge:

$$18,5\%$$

La probabilitat que el següent vídeo es faça viral és del:

$$18,5\%$$

b) La probabilitat que el creador del pròxim vídeo viral siga talentós. (0,75 punts)

b) Probabilitat que el creador del pròxim vídeo viral siga talentós

Ara ens demanen:

$$P(T \mid V)$$

És a dir, **sabem que el vídeo s'ha fet viral** i volem saber quina és la probabilitat que el creador siga talentós.

Utilitzem el **teorema de Bayes**:

$$P(T \mid V) = \frac{P(T) \cdot P(V \mid T)}{P(V)}$$

Ja sabem que:

$$P(V) = 0,185$$

Per tant:

$$P(T \mid V) = \frac{0,30 \cdot 0,5}{0,185}$$

$$= \frac{0,15}{0,185}$$

$$P(T \mid V) \approx 0,8108$$

En percentatge:

$$81,08\%$$

Resposta

Si sabem que un vídeo s'ha fet viral, la probabilitat que el seu creador siga talentós és aproximadament:

$$81,08\%$$

Observació important: no és el 50%. El fet que el vídeo siga viral ens dona informació sobre el tipus de creador.

- c) La probabilitat que en els pròxims 4 vídeos d'un creador no talentós hi haja 2 o més vídeos que es facen virals. (0,75 punts)

c) Probabilitat que en els pròxims 4 vídeos d'un creador no talentós hi haja 2 o més vídeos virals

Ara sabem que el creador **no és talentós**.

Per tant, la probabilitat que un vídeo siga viral és:

$$p = 0,05$$

I la probabilitat que **no** siga viral és:

$$q = 1 - 0,05 = 0,95$$

Tenim:

$$n = 4$$

Aquest és un problema de **distribució binomial**:

$$X \sim B(4, 0,05)$$

Ens demanen:

$$P(X \geq 2)$$

En lloc de calcular directament tots els casos $X = 2, 3, 4$, és més senzill utilitzar el complement:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

És a dir:

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

Calculem $P(X = 0)$

La fórmula binomial és:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Per $k = 0$:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} (0,05)^0 (0,95)^4$$

$$P(X = 0) = 0,95^4$$

$$P(X = 0) = 0,81450625$$

Calculem $P(X = 1)$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} (0,05)^1 (0,95)^3$$

$$= 4(0,05)(0,95)^3$$

$$= 0,171475$$

Calculem la probabilitat demanada

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,81450625 + 0,171475)$$

$$= 1 - 0,98598125$$

$$P(X \geq 2) = 0,01401875$$

En percentatge:

$$1,402\%$$

La probabilitat que hi haja **2 o més vídeos virals entre els 4 pròxims** és aproximadament:

$$1,40\%$$

- d) La probabilitat que en els pròxims 100 vídeos d'un creador talentós hi haja almenys 40 vídeos que es facen virals. *(0,75 punts)*

d) Probabilitat que en els pròxims 100 vídeos d'un creador talentós hi haja almenys 40 vídeos virals

Ara el creador és talentós.

Per tant:

$$p = 0,5$$

Tenim:

$$n = 100$$

Definim:

$$X = \text{nombre de vídeos virals entre els 100}$$

Aleshores:

$$X \sim B(100, 0,5)$$

Ens demanen:

$$P(X \geq 40)$$

Podríem calcular:

$$P(X = 40) + P(X = 41) + \dots + P(X = 100)$$

però és molt més pràctic utilitzar el complement:

$$P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39)$$

Per tant:

$$P(X \geq 40) = 1 - \sum_{k=0}^{39} \binom{100}{k} (0,5)^k (0,5)^{100-k}$$

Com que:

$$(0,5)^k (0,5)^{100-k} = (0,5)^{100}$$

queda:

$$P(X \geq 40) = 1 - \sum_{k=0}^{39} \binom{100}{k} (0,5)^{100}$$

El resultat numèric és:

$$P(X \geq 40) \approx 0,9824$$

En percentatge:

$$98,24\%$$

La probabilitat que entre els pròxims 100 vídeos hi haja **almenys 40 vídeos virals** és aproximadament:

$$98,24\%$$

d) Aproximació de la binomial per una normal

Sabem que el creador és talentós, per tant:

$$p = 0,5$$

i tenim $n = 100$ vídeos.

Definim:

$$X = \text{nombre de vídeos virals}$$

Aleshores:

$$X \sim B(100, 0,5)$$

Ens demanen:

$$P(X \geq 40)$$

1. Comprovem que podem aproximar per una normal

Es compleix:

$$np = 100 \cdot 0,5 = 50$$

$$n(1 - p) = 100 \cdot 0,5 = 50$$

Com que tots dos valors són majors que 5, podem fer l'aproximació:

$$X \approx N(\mu, \sigma)$$

on:

$$\mu = np$$

i

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

Per tant:

$$\mu = 100(0,5) = 50$$

$$\sigma = \sqrt{100(0,5)(0,5)}$$

$$\sigma = \sqrt{25} = 5$$

Així:

$$X \approx N(50, 5)$$

on 50 és la mitjana i 5 la desviació típica.

2. Apliquem la correcció de continuïtat

Ens demanen:

$$P(X \geq 40)$$

Com que X és una variable discreta i l'aproximem per una variable contínua, fem **correcció de continuïtat**:

$$P(X \geq 40) \approx P(Y \geq 39,5)$$

on:

$$Y \sim N(50, 5)$$

Això és important: **no utilitzem 40, sinó 39,5**.

3. Estandarditzem

Transformem la variable Y en una normal estàndard:

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

Per tant:

$$P(Y \geq 39,5) = P\left(Z \geq \frac{39,5 - 50}{5}\right)$$

Calculem:

$$\frac{39,5 - 50}{5} = \frac{-10,5}{5} = -2,1$$

Així:

$$P(X \geq 40) \approx P(Z \geq -2,1)$$

4. Utilitzem la simetria de la normal

Sabem que:

$$P(Z \geq -2,1) = P(Z \leq 2,1)$$

Consultant la taula de la normal estàndard:

$$P(Z \leq 2,1) = 0,9821$$

Per tant:

$$P(X \geq 40) \approx 0,9821$$

En percentatge:

$$98,21\%$$

$$P(X \geq 40) \approx 0,9821 = 98,21\%$$

Per tant, hi ha aproximadament un **98,21% de probabilitat** que en els pròxims 100 vídeos d'un creador talentós n'hi haja **40 o més que es facen virals**.

Nota: el càlcul binomial exacte dona aproximadament 98,24%, mentre que l'aproximació normal dona 98,21%. La diferència és molt xicoteta, cosa que confirma que l'aproximació és bona.