

Problema 3. En la fase final del campionat d'Europa de bàsquet juguen Alemanya, França, Croàcia i Espanya. Les semifinals són: Espanya-Alemanya i França-Croàcia. La probabilitat que Espanya guanye a Alemanya és 0,7, la probabilitat que guanye a França és 0,25 i la probabilitat que guanye a Croàcia és 0,55. La probabilitat que França perda contra Croàcia és 0,4. Se suposa independència entre els resultats d'uns partits i d'altres.

a) Calculeu la probabilitat que la final siga Alemanya-Croàcia.

(0,5 punts)

Dades del problema

Tenim les semifinals:

- Espanya – Alemanya
- França – Croàcia

Probabilitats donades:

- $P(\text{Espanya guanya Alemanya}) = 0,7$
- $P(\text{Espanya guanya França}) = 0,25$
- $P(\text{Espanya guanya Croàcia}) = 0,55$
- $P(\text{França perd contra Croàcia}) = 0,4$

Per tant:

- $P(\text{Espanya perd contra Alemanya}) = 1 - 0,7 = 0,3$
- $P(\text{França guanya Croàcia}) = 1 - 0,4 = 0,6$

El problema ens diu que els resultats dels partits són **independents**.

a) Probabilitat que la final siga Alemanya-Croàcia

Perquè la final siga **Alemanya-Croàcia** han de passar dues coses:

1. Alemanya ha de guanyar Espanya.
2. Croàcia ha de guanyar França.

Per tant:

$$P(\text{Alemanya-Croàcia}) = P(\text{Alemanya guanya Espanya}) \cdot P(\text{Croàcia guanya França})$$

Sabem que:

$$P(\text{Alemanya guanya Espanya}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

i:

$$P(\text{Croàcia guanya França}) = 0,4$$

Per tant:

$$P(\text{Alemanya-Croàcia}) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

Resultat

$$P(\text{Alemanya-Croàcia}) = 0,12 = 12 \%$$

b) Calculeu la probabilitat que Espanya siga campiona.

(1 punt)

b) Probabilitat que Espanya siga campiona

Perquè Espanya siga campiona han de passar dues coses:

Primera: Espanya ha de guanyar Alemanya

Probabilitat:

0,7

Segona: Espanya ha de guanyar la final

Per arribar a la final, França o Croàcia poden guanyar la seua semifinal.

Hi ha dos casos possibles:

Cas 1: Croàcia guanya França

Probabilitat:

0,4

I després Espanya ha de guanyar Croàcia:

0,55

Per tant:

$0,4 \cdot 0,55 = 0,22$

Cas 2: França guanya Croàcia

Probabilitat:

0,6

I després Espanya ha de guanyar França:

0,25

Per tant:

$$0,6 \cdot 0,25 = 0,15$$

Com que els dos casos són incompatibles, els sumem:

$$P(\text{Espanya guanya la final}) = 0,22 + 0,15 = 0,37$$

Ara multipliquem per la probabilitat que Espanya arribi a la final:

$$P(\text{Espanya campiona}) = 0,7 \cdot 0,37$$

$$P(\text{Espanya campiona}) = 0,259$$

Resultat

$$P(\text{Espanya siga campiona}) = 0,259 = 25,9 \%$$

- c) Si Espanya ha sigut campiona, quina és la probabilitat que en la final haja jugat contra França? *(0,5 punts)*

c) Si Espanya ha sigut campiona, probabilitat que la final haja sigut contra França

Ara tenim una **probabilitat condicionada**.

Ens demanen:

Sabent que Espanya ha sigut campiona, quina probabilitat hi ha que haja jugat la final contra França?

Utilitzem:

$$P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$$

En aquest cas:

- A = Espanya juga la final contra França.
- B = Espanya és campiona.

Pas 1. Probabilitat que Espanya jugue la final contra França i siga campiona

Perquè això passe:

1. Espanya ha de guanyar Alemanya → 0,7
2. França ha de guanyar Croàcia → 0,6
3. Espanya ha de guanyar França → 0,25

Multipliquem:

$$0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,25 = 0,105$$

Pas 2. Dividim per la probabilitat que Espanya siga campiona

De l'apartat anterior:

$$P(\text{Espanya campiona}) = 0,259$$

Per tant:

$$P(\text{final contra França} \mid \text{Espanya campiona}) = 0,105 / 0,259$$

Calculant:

$$P = 0,4054...$$

Resultat

$$P(\text{final contra França} \mid \text{Espanya campiona}) \approx 0,405 = 40,5 \%$$

Interpretació: entre totes les vegades que Espanya acabara sent campiona, en aproximadament un **40,5 %** dels casos hauria jugat la final contra França.

- d) El mes següent al campionat, Espanya i Croàcia jugaran set partits. Quina és la probabilitat que Croàcia guanye almenys cinc d'aquests partits? *(1 punt)*

d) Probabilitat que Croàcia guanye almenys cinc dels set partits

Ara canviem de situació.

Espanya i Croàcia jugaran **7 partits**.

Sabem que:

$$P(\text{Espanya guanya Croàcia}) = 0,55$$

Per tant, la probabilitat que **Croàcia guanye** és:

$$P(\text{Croàcia guanya}) = 1 - 0,55 = 0,45$$

Tenim, per tant, una **distribució binomial**:

$$X \sim B(7, 0,45)$$

Ens demanen que Croàcia guanye **almenys cinc** partits.

Això significa:

$$P(X \geq 5)$$

És a dir:

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

Probabilitat de guanyar exactament 5 partits

Utilitzem:

$$P(X = k) = C(7,k) \cdot 0,45^k \cdot 0,55^{(7-k)}$$

Per a $k = 5$:

$$P(X = 5) = C(7,5) \cdot 0,45^5 \cdot 0,55^2$$

Com que:

$$C(7,5) = 21$$

tenim:

$$P(X = 5) = 21 \cdot 0,45^5 \cdot 0,55^2$$

$$P(X = 5) \approx 0,1022$$

Probabilitat de guanyar exactament 6 partits

$$P(X = 6) = C(7,6) \cdot 0,45^6 \cdot 0,55$$

Com que:

$$C(7,6) = 7$$

tenim:

$$P(X = 6) \approx 0,0279$$

Probabilitat de guanyar els 7 partits

$$P(X = 7) = C(7,7) \cdot 0,45^7 \cdot 0,55^0$$

Per tant:

$$P(X = 7) = 0,45^7 \approx 0,0037$$

Sumem les tres probabilitats

$$P(X \geq 5) = 0,1022 + 0,0279 + 0,0037$$

$$P(X \geq 5) \approx 0,1338$$

Resultat

$$P(\text{Croàcia guanya almenys 5 partits}) \approx 0,134 = 13,4 \%$$