

4.1 Un brot de grip es propaga durant uns dies. El coeficient de gravetat de la grip t dies després d'iniciar-se el brot ve donat per una funció $F(t)$ amb una derivada $F'(t) = t^2(10 - t)$.

4.1.1 (1.25 punts) Calcula la funció $F(t)$ sabent que en $t = 0$ el coeficient de gravetat és 6.

4.1.1. Calcula la funció $F(t)$

1. Desenvolupem la derivada

Partim de:

$$F'(t) = t^2(10 - t)$$

Desenvolupem:

$$F'(t) = 10t^2 - t^3$$

Com que $F'(t)$ és la derivada de $F(t)$, hem de **integrar**:

$$F(t) = \int (10t^2 - t^3) dt$$

Integrarem terme a terme:

$$\int 10t^2 dt = 10 \frac{t^3}{3}$$

i:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4}$$

Per tant:

$$F(t) = \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C$$

on C és la constant d'integració.

2. Utilitzem la condició inicial

L'enunciat ens diu que en $t = 0$:

$$F(0) = 6$$

Substituïm:

$$6 = \frac{10}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4 + C$$

Per tant:

$$C = 6$$

Així, la funció és:

$$F(t) = 6 + \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4$$

 Resposta 4.1.1

$$F(t) = 6 + \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4$$

4.1.2 (1.25 punts) Calcula quants dies després d'iniciar-se el brot s'arriba al valor màxim del coeficient i quin és aquest número.

4.1.2. Quan s'arriba al valor màxim?

Per trobar el màxim del coeficient de gravetat, hem de buscar els **punts crítics** de $F(t)$.

Un màxim o mínim es pot produir quan:

$$F'(t) = 0$$

Sabem que:

$$F'(t) = t^2(10 - t)$$

Per tant:

$$t^2(10 - t) = 0$$

Un producte és zero quan algun dels factors és zero:

$$t^2 = 0$$

o bé:

$$10 - t = 0$$

Això ens dona:

$$t = 0$$

i:

$$t = 10$$

1. Determinem quin és el màxim

Estudiem el signe de la derivada:

$$F'(t) = t^2(10 - t)$$

Com que $t^2 \geq 0$, per als dies $t > 0$ el signe depèn de $10 - t$.

Si $0 < t < 10$:

$$10 - t > 0$$

Per tant:

$$F'(t) > 0$$

La funció **creix**.

Si $t > 10$:

$$10 - t < 0$$

Per tant:

$$F'(t) < 0$$

La funció **decreix**.

Així, en $t = 10$, la funció passa de **creixent a decreixent**.

Per tant:

$$\boxed{t = 10}$$

és un **màxim**.

2. Calculem el valor màxim

Utilitzem la funció que hem trobat:

$$F(t) = 6 + \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4$$

Substituïm $t = 10$:

$$\begin{aligned} F(10) &= 6 + \frac{10}{3}(10)^3 - \frac{1}{4}(10)^4 \\ &= 6 + \frac{10}{3}(1000) - \frac{1}{4}(10000) \\ &= 6 + \frac{10000}{3} - 2500 \end{aligned}$$

Posem-ho tot sobre 3:

$$\begin{aligned} F(10) &= \frac{18 + 10000 - 7500}{3} \\ &= \frac{2518}{3} \end{aligned}$$

Per tant:

$$F(10) = \frac{2518}{3} \approx 839,33$$

Resposta final

El coeficient de gravetat arriba al seu valor màxim:

10 dies després de l'inici del brot

i aquest valor màxim és:

$$\frac{2518}{3} \approx 839,33$$