

4.1 Siga la funció real de variable real $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

4.1.1 (1.25 punts) Representa gràficament la funció $f(x)$.

4.1.1. Representació gràfica de la funció

Per representar una funció cúbica, estudiarem:

1. Punts de tall amb els eixos.
2. Derivada i punts màxim/mínim.
3. Creixement i decreixement.
4. Alguns punts importants per dibuixar la corba.

1. Punts de tall amb l'eix X

Busquem:

$$f(x) = 0$$

És a dir:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

Traiem factor comú x :

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Factoritzem el segon polinomi:

$$x(x - 1)(x - 2) = 0$$

Per tant:

$$x = 0, x = 1, x = 2$$

Els punts de tall amb l'eix X són:

$$(0,0), (1,0) \text{ i } (2,0)$$

2. Punt de tall amb l'eix Y

Per a $x = 0$:

$$f(0) = 0$$

Per tant, el punt de tall amb l'eix Y és també:

$$(0,0)$$

3. Calculem la derivada

Per estudiar el creixement i els extrems:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Busquem els punts crítics:

$$f'(x) = 0$$

Per tant:

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

Utilitzem la fórmula de segon grau:

$$x = [6 \pm \sqrt{(36 - 24)}] / 6$$

$$x = [6 \pm \sqrt{12}] / 6$$

$$x = [6 \pm 2\sqrt{3}] / 6$$

Per tant:

$$x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i

$$x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aproximadament:

- $x_1 \approx 0,423$
- $x_2 \approx 1,577$

4. Determinem quin és el màxim i quin és el mínim

Podem utilitzar la segona derivada.

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$\text{En } x_1 = 1 - \sqrt{3}/3$$

Com que $x_1 < 1$:

$$f''(x_1) < 0$$

Per tant, tenim un:

màxim local

$$\text{En } x_2 = 1 + \sqrt{3}/3$$

Com que $x_2 > 1$:

$$f''(x_2) > 0$$

Per tant, tenim un:

mínim local

5. Coordenades del màxim i del mínim

Ara calculem les ordenades.

Per al màxim:

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Substituint en la funció:

$$f(x_1) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Per tant:

$$M \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9} \right)$$

Aproximadament:

$$M \approx (0,423 ; 0,385)$$

Per al mínim:

$$x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i:

$$f(x_2) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Per tant:

$$m \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9} \right)$$

Aproximadament:

$$m \approx (1,577 ; -0,385)$$

6. Creixement i decreixement

La derivada és:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Com que és una paràbola amb coeficient principal positiu, és:

- positiva abans del primer punt crític,
- negativa entre els dos punts crítics,
- positiva després del segon.

Per tant:

Creixent

$$\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

Decreixent

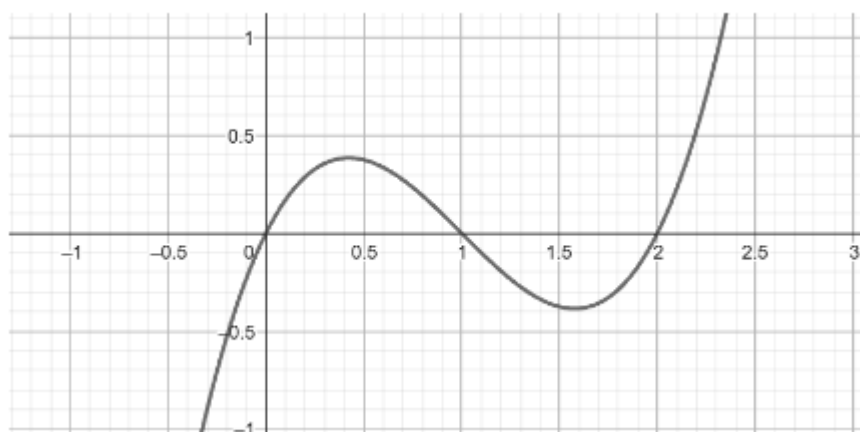
$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

7. Esquema de la gràfica

Tenim els punts fonamentals:

- (0,0)
- màxim: (0,423 ; 0,385)
- (1,0)
- mínim: (1,577 ; -0,385)
- (2,0)

La corba comença baix a l'esquerra, **creix**, passa per (0,0), arriba al màxim, després **decreix**, passa per (1,0), arriba al mínim i finalment torna a **créixer**, passant per (2,0).



La representació real és una corba cúbica suau que passa pels tres punts $(0,0)$, $(1,0)$ i $(2,0)$.

4.1.2 (1.25 punts) Calcula l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = f(x)$, l'eix x i les rectes verticals que passen pels punts mínim i màxim de la funció.

4.1.2. Àrea delimitada per la corba, l'eix X i les verticals dels màxim i mínim

Aquest és el punt més important de l'exercici.

Les rectes verticals que passen pel màxim i el mínim són:

$$x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i

$$x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Per tant, la regió que volem estudiar està entre:

$$x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{i} \quad x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1. La funció canvia de signe?

Sí.

Recordem que la funció talla l'eix X en:

$x = 0, 1$ i 2

El nostre interval és aproximadament:

$[0,423 ; 1,577]$

Per tant, dins d'aquest interval tenim el punt:

$x = 1$

Això significa que:

- entre **0,423** i **1**, la funció és positiva;
- entre **1** i **1,577**, la funció és negativa.

Per això **no podem calcular directament una única integral i prendre el resultat com a àrea**.

Hem de separar la regió en dues parts.

2. Àrea de la primera part

La primera part està entre:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i 1.

Com que $f(x) > 0$:

$$A_1 = \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

Calculem una primitiva:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Per tant:

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}^1$$

El resultat és:

$$A_1 = \frac{5}{36}$$

3. Àrea de la segona part

Ara tenim l'interval:

$$1 \text{ fins a } 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

En aquest interval la funció és **negativa**.

Per tant, la integral ens donarà un valor negatiu, però una àrea sempre és positiva.

Així:

$$A_2 = - \int_1^{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

El resultat és:

$$A_2 = \frac{5}{36}$$

4. Àrea total

Sumem les dues àrees:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \frac{5}{36} + \frac{5}{36}$$

$$A = \frac{10}{36}$$

Simplifiquem:

$$A = \frac{5}{18}$$

En decimal:

$$A \approx 0,278$$

