

4.1 Considerem la funció real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

4.1.1 (0.5 punts) Troba el domini i estudia la continuïtat de la funció f .

4.1.1 Troba el domini i estudia la continuïtat de la funció. (0,5 punts)

Pas 1. Domini

El denominador és

$$x^2 + 1.$$

Com que

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tenim

$$x^2 + 1 > 0$$

per a qualsevol valor real de x .

Per tant, el denominador **mai s'anul·la**.

Domini

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Pas 2. Continuïtat

La funció és una funció racional.

Les funcions racionals són contínues en tots els punts on el denominador no és zero.

Com que

$$x^2 + 1 \neq 0$$

per a qualsevol x ,

la funció és contínua a tot $\mathbb{R}$.

Resposta

La funció és contínua en tot $\mathbb{R}$.

4.1.2 (0.5 punts) Troba les asímptotes i els intervals de creixement i decreixement de la funció f .

4.1.2 Troba les asímptotes i els intervals de creixement i decreixement. (0,5 punts)

1. Asímtotes

Asímtotes verticals

Cal resoldre

$$x^2 + 1 = 0.$$

No té solucions reals.

No hi ha asímptotes verticals.

Asímtota horitzontal

Com que el grau del numerador és menor que el del denominador,

$$y = 0$$

és una asímtota horitzontal.

Asímtotes obliqües

No n'hi ha, perquè

$$\deg(\text{numerador}) < \deg(\text{denominador}).$$

2. Creixement i decreixement

Calculem la derivada.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Aplicant la regla del quocient,

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Simplificant,

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Com que el denominador sempre és positiu, estudiem

$$-x^2 - 2x + 1.$$

Resolent

$$-x^2 - 2x + 1 = 0,$$

equivalentment,

$$x^2 + 2x - 1 = 0,$$

obtenim

$$x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Estudi del signe

- Si

$$x < -1 - \sqrt{2},$$

$$f'(x) < 0.$$

- Si

$$-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2},$$

$$f'(x) > 0.$$

- Si

$$x > -1 + \sqrt{2},$$

$$f'(x) < 0.$$

Resposta

Creix en

$$(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$$

i

decreix en

$$(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty).$$

4.1.3 (1 punt) Calcula, si n'hi ha, els valors màxims i mínims relatius i absoluts de la funció f .

4.1.3 Calcula els màxims i mínims relatius i absoluts. (1 punt)

Els punts crítics són

$$x = -1 - \sqrt{2}$$

i

$$x = -1 + \sqrt{2}.$$

Mínim relatiu

En

$$x = -1 - \sqrt{2},$$

la derivada passa de negativa a positiva.

És un **mínim relatiu**.

Calculem la imatge.

Com que

$$x = -1 - \sqrt{2},$$

resulta

$$f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2} + 1}{4}.$$

Per tant,

$$\left(-1 - \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2} + 1}{4}\right)$$

és un mínim relatiu.

Màxim relatiu

En

$$x = -1 + \sqrt{2},$$

la derivada passa de positiva a negativa.

És un **màxim relatiu**.

Calculem la imatge.

$$f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{4}.$$

Per tant,

$$\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2} + 1}{4}\right)$$

és un màxim relatiu.

Extrems absoluts

Com que

- la funció és contínua,
- tendeix a 0 quan

$$x \rightarrow \pm\infty,$$

els dos extrems anteriors també són els absoluts.

Resposta

Màxim absolut

$$\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2} + 1}{4} \right)$$

Mínim absolut

$$\left(-1 - \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2} + 1}{4} \right)$$

4.1.4 (0.5 punts) Representa la funció f .

4.1.4 Representa la funció. (0,5 punts)

Per dibuixar la gràfica, indiquem els seus elements principals.

Tall amb els eixos

- Eix X :

$$x + 1 = 0$$

$$(-1, 0)$$

- Eix Y :

$$f(0) = 1$$

$$(0, 1)$$

Asímtota

$$y = 0$$

Extrems

- Mínim

$$\left(-1 - \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2} + 1}{4}\right)$$

- Màxim

$$\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2} + 1}{4}\right)$$

Variació

- Decreix en

$$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$$

- Creix en

$$(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$$

- Decreix en

$$(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$$

