

P4.1 Es pretén estudiar la intensitat del senyal elèctric registrat per un elèctrode implantat en una àrea del còrtex cerebral. La intensitat del senyal $I(t)$ (en microvolts) en funció del temps t (en mil·lisegons) després d'un estímul ve donada per la funció

$$I(t) = 50te^{-0.2t}, \quad t \geq 0.$$

- (a) [1 punt] Calcula en quin instant de temps la intensitat del senyal és màxima i quina és aquesta intensitat.

(a) Quan és màxima la intensitat i quin és el seu valor?

Per trobar el màxim d'una funció, primer calculem la derivada i la igualem a zero.

1. Derivem la funció

Tenim:

$$I(t) = 50te^{-0,2t}$$

És un producte de dues funcions:

$$u(t) = 50t$$

$$v(t) = e^{-0,2t}$$

Utilitzem la regla del producte:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Tenim:

$$u'(t) = 50$$

i:

$$v'(t) = -0,2e^{-0,2t}$$

Per tant:

$$I'(t) = 50e^{-0,2t} + 50t(-0,2e^{-0,2t})$$

Traiem factor comú:

$$I'(t) = 50e^{-0,2t}(1 - 0,2t)$$

Per tant:

$$I'(t) = 50e^{-0,2t}(1 - 0,2t)$$

2. Busquem els punts crítics

Igualem la derivada a zero:

$$50e^{-0,2t}(1 - 0,2t) = 0$$

Sabem que:

$$e^{-0,2t} > 0$$

i $50 \neq 0$.

Per tant, l'única possibilitat és:

$$1 - 0,2t = 0$$

Aïllem t :

$$0,2t = 1$$

$$t = 5$$

Per tant, la intensitat és màxima en:

$$t = 5 \text{ ms}$$

3. Calculem la intensitat màxima

Substituïm $t = 5$ a la funció:

$$I(5) = 50 \cdot 5 \cdot e^{-0,2 \cdot 5}$$

$$I(5) = 250e^{-1}$$

Com que:

$$e^{-1} = \frac{1}{e}$$

tenim:

$$I(5) = \frac{250}{e}$$

Aproximadament:

$$I(5) \approx 91,97 \mu V$$

(b) [1 punt] Calcula una primitiva de la funció $I(t)$, és a dir, determina $\int I(t) dt$.

(b) Calcula una primitiva de $I(t)$

Hem de calcular:

$$\int I(t) dt$$

és a dir:

$$\int 50te^{-0,2t} dt$$

Traiem el 50 fora de la integral:

$$50 \int te^{-0,2t} dt$$

Aquí utilitzarem integració per parts.

1. Fórmula d'integració per parts

Recordem:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Triem:

$$u = t$$

i:

$$dv = e^{-0,2t} dt$$

Per tant:

$$du = dt$$

Ara calculem v :

$$v = \int e^{-0,2t} dt$$

Com que:

$$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at}$$

tenim:

$$v = \frac{1}{-0,2} e^{-0,2t}$$

$$v = -5e^{-0,2t}$$

2. Apliquem la fórmula

$$\begin{aligned} \int te^{-0,2t} dt &= t(-5e^{-0,2t}) - \int (-5e^{-0,2t}) dt \\ &= -5te^{-0,2t} + 5 \int e^{-0,2t} dt \end{aligned}$$

Sabem que:

$$\int e^{-0,2t} dt = -5e^{-0,2t}$$

Per tant:

$$\int te^{-0,2t} dt = -5te^{-0,2t} - 25e^{-0,2t}$$

Traiem factor comú:

$$\boxed{\int te^{-0,2t} dt = -5e^{-0,2t}(t + 5) + C}$$

3. Tornem a multiplicar per 50

Recordem que teníem:

$$50 \int t e^{-0,2t} dt$$

Per tant:

$$\int 50 t e^{-0,2t} dt = 50[-5e^{-0,2t}(t + 5)] + C$$

Finalment:

$$\boxed{\int I(t) dt = -250(t + 5)e^{-0,2t} + C}$$